УДК 517.442

ПОХИБКИ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

А.В. Кожевников[1], Л.І. Мещеряков[2]
[1] Національний технічний университет "Дніпровська політехніка", Дніпро, Україна,
kozhevnykov.a.v@nmu.one, ORCID 0000-0002-0078-2546
[2] Національний технічний университет "Дніпровська політехніка", Дніпро, Україна,
meshcheriakov.l.i@nmu.one, ORCID 0000-0002-9579-1970

ERRORS OF COMPLEX VARIABLE FUNCTION NUMERICAL INTEGRATION METHOD

A. Kozhevnykov[1], L. Meshcheryakov[2]
Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine,
[1] kozhevnykov.a.v@nmu.one, ORCID 0000-0002-0078-2546
Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine,
[2] meshcheriakov.l.i@nmu.one, ORCID 0000-0002-9579-1970

Анотація. Метою роботи є отримання й аналіз співвідношень для похибок, які виникають під час чисельного інтегрування функцій комплексної змінної. При дослідженнях використовувалися методи математичного аналізу, теорії наближених обчислень та теорії функцій комплексної змінної. У результаті роботи отримані аналітичні співвідношення для розрахунку похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної: модуля локальної похибки на кожному кроці інтегрування, а також істинного, наближеного та верхнього граничного значення модуля похибок за контуром інтегрування. Верифікація отриманих формул абсолютної похибки чисельного інтегрування функцій комплексної змінної проводилася на прикладі обчислення інтегралу, який має аналітичне розв'язування. Побудовані та проаналізовані залежності похибок від модуля кроку інтегрування. Для малих значень модулю кроку істинне значення модулю похибки добре збігається з наближеним. Для максимального значення модуля кроку, який відповідає обчисленню інтеграла за один крок, наближене значення модуля похибки збігається зі значенням оцінки його верхнього граничного значення. Графік залежності логарифму верхнього граничного значення модуля похибки від логарифму модуля кроку інтегрування має лінійний характер. Проведене обчислення похибок чисельного методу розрахунків перехідної функції системи автоматичного регулювання з ПД-ПІД-контроллером. Порівняння результатів, отриманих аналітичним та чисельним методами, доводить хорошу узгодженість чисельного розв'язку з аналітичним у межах обчислених похибок. Наукова новизна роботи полягає в отримані аналітичних співвідношень для розрахунку похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної: модуля локальної похибки на кожному кроці інтегрування, а також наближеного та верхнього граничного значення модуля похибок за контуром інтегрування. Практичним значенням результатів роботи є можливість отримання напередвизначених похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної за рахунок вибору кроку інтегрування, шо може бути використано для покращення якості аналізу перехідних процесів у електротехнічних системах та системах автоматичного регулювання.

Ключові слова: чисельне інтегрування, функція комплексної змінної, похибка чисельного методу, зворотне перетворення Лапласа.

Вступ. При розв'язанні низки прикладних задач електротехніки, електроніки, теорії автоматичного керування і теплофізики використовуються чисельні методи функцій комплексної змінної. До останніх, зокрема, відносяться методи розв'язання диференціальних рівнянь з використанням перетворень Лапласу. Такі методи, що одержали назву операторних, дозволяють приводити диференціальні рівняння, в які входить шукана функція-оригінал, до вигляду алгебраїчних щодо зображення цієї функції. Отримані рівняння вирішуються відносно функції-зображення, після чого остаточний результат знаходиться шляхом переходу від отриманого зображення до оригіналу. Останній етап рішення є найбільш складним, що обумовлено неможливістю аналітичного розв’язування задач зворотного перетворення в загальному випадку, а також проблемами збіжності і стійкості чисельних методів розв'язання таких задач.

Аналіз існуючих досліджень і публікацій. Найбільш просто задача зворотного перетворення Лапласа вирішується аналітично, в тому разі, якщо зображення рішень є дрібно-раціональні функції. При цьому застосовується розкладання зображень на елементарні дроби і їх почленний перехід у простір оригіналів з використанням властивості лінійності перетворення. Однак, при значному числі полюсів зображення використання такого підходу призводить до громіздких обчислень. Крім того, при розв’язанні операторними методами диференціальних рівнянь у часткових похідних можуть виникати зображення, які не є дрібно-раціональними, зокрема, мероморфні функції. Під останніми розуміються функції комплексної змінної, аналітичні у всій площині, за винятком ліченої множини ізольованих полюсів. У таких випадках отримання оригіналів зображень можуть бути використані чисельні методи зворотного перетворення Лапласа. Питанням обґрунтування вибору чисельного методу зворотного перетворення Лапласа для знаходження оригіналів мероморфних функцій з кінцевим числом полюсів стосовно задач розв'язання хвильових рівнянь, які описують перехідні процеси в довгих лініях, присвячена робота [1]. У ній зроблений порівняльний аналіз найбільш поширених чисельних методів зворотного перетворення Лапласа, а також запропонований і обгрунтований метод знаходження оригіналів мероморфних функцій з кінцевим числом полюсів. Метод базується на чисельному визначенні інтегралу за замкненим контуром, що охоплює полюса зображення. Цей метод отримав подальший розвиток у роботі [2], де, за його допомогою, був проведений розрахунок перехідної функції системи автоматичного регулювання нестійкого об’єкта третього порядку з ПД-ПІД-контроллером. Також були розглянуті особливості інтегрування функцій комплексної змінної за контурами різної форми. Втім, наразі, в інформаційних джерелах відсутня інформація про похибки чисельного інтегрування функцій комплексної змінної.

Формулювання мети і завдань досліджень. Метою роботи є отримання й аналіз співвідношень для похибок, які виникають при чисельному інтегруванні функцій комплексної змінної.

Для досягнення поставленої мети були: отримані аналітичні співвідношення для розрахунку похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної, проаналізовані залежності похибок від модуля кроку інтегрування, визначені похибки чисельного методу розрахунків перехідної функції системи автоматичного регулювання з ПД-ПІД- контроллером та порівняні результати, отримані аналітичним та чисельним методами.

Методика досліджень. При дослідженнях використовувалися методи математичного аналізу, теорії наближених обчислень та теорії функцій комплексної змінної.

Викладення основного матеріалу досліджень. Визначення похибки чисельного інтегрування функції комплексної змінної розглянуто на прикладі квадратурного методу середніх прямокутників з використанням підходу, який наведений в роботі [2]. Для даного методу абсолютна похибка, яка виникає під час інтегруванні функції $f(z)$ за довільним контуром Γ, становить

$$\left|R_0\right| = \left|\int_\Gamma f(z)dz - \sum_{i=1}^{N} f\left\{z_0 + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\Delta z_i\right]\right\}\cdot\Delta z_i\right| . \tag{1}$$

Тут Δz_i – приріст аргумента на i – му кроці інтегрування, z_0 – початкова точка контура Γ.

З іншого боку, з урахуванням правил наближених обчислень, максимальне значення похибки згідно формули (1) можна визначити як суму абсолютних значень похибок R_i на кожному кроці (локальних похибок), тобто

$$\left|R\right| = \sum_{i=1}^{N}\left|R_i\right| , \tag{2}$$

яка не перевищує значення

$$\left|R_{\max}\right| = \sum_{i=1}^{N}\max_\Gamma\left|R_i\right| . \tag{3}$$

Знайдемо величину R_i. Для цього розкладемо функцію $f(z)$ в околиці крапки

$$z_{i-\frac{1}{2}} = z_0 + \sum_{i=1}^{i} \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta z_i \ , \tag{4}$$

і запишемо

$$\begin{gathered} f(z) = f\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) + f'\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(z - z_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2!} \cdot f'\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(z - z_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 + \\ + \frac{1}{3!} \cdot f''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(z - z_{i-\frac{1}{2}}\right)^3 + O\left(\Delta z_i^4\right). \end{gathered} , \tag{5}$$

Тут $\Delta z_i = z_i - z_{i-1} = 2 \cdot \left(z_i - z_{i-\frac{1}{2}} \right) = -2 \cdot \left(z_{i-1} - z_{i-\frac{1}{2}} \right)$ – приріст незалежної змінної на i – му кроці інтегрування.

Інтегруючи функцію $f(z)$ на сегменті $[z_{i-1}, z_i]$, маємо

$$\begin{gathered} \int_{z_{i-1}}^{z_i} f(z)dz = f\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot z\Big|_{z_{i-1}}^{z_i} + \frac{1}{2} \cdot f'\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(z - z_{i-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{z_{i-1}}^{z_i} + \\ + \frac{1}{6} \cdot f''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(z - z_{i-\frac{1}{2}}\right)^3\Bigg|_{z_{i-1}}^{z_i} + \frac{1}{24} \cdot f'''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(z - z_{i-\frac{1}{2}}\right)^4\Bigg|_{z_{i-1}}^{z_i} + \\ + O(\Delta z_i^5) = f\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta z_i + \frac{1}{2} \cdot f'\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left[\left(\frac{\Delta z_i}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\Delta z_i}{2}\right)^2\right] + \\ + \frac{1}{6} \cdot f''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left[\left(\frac{\Delta z_i}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\Delta z_i}{2}\right)^3\right] + \frac{1}{24} \cdot f'''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left[\left(\frac{\Delta z_i}{2}\right)^4 - \left(-\frac{\Delta z_i}{2}\right)^4\right] + \\ + O(\Delta z_i^5) = \left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta z_i + \frac{\Delta z_i^3}{24} \cdot f''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta z_i^5). \end{gathered} \tag{6}$$

При малих значеннях Δz_i, нехтуючи останнім членом виразу (6), який має більш високий порядок малості порівняно з іншими, можна записати

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} f(z)dz = f\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta z_i + R_i . . \tag{7}$$

При цьому модуль абсолютної похибки чисельного інтегрування

$$|R_i| = \frac{|\Delta z_i^3|}{24} . \left| f''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \right| = \frac{\Delta r_i^3}{24} . \left| f''\left(z_{i-\frac{1}{2}}\right) \right| . \tag{8}$$

Тут $\Delta z_i = \Delta r_i \cdot \exp\left(j \cdot \Delta \varphi_i \right)$, де Δz_i, $\Delta \varphi_i$ – приріст модуля та аргумент приросту незалежної змінної на i – му кроці інтегрування. У разі, якщо модуль кроку інтегрування є постійним $\Delta z_i = \Delta r$, то з урахуванням виразів (2) та (3) можна записати

$$\left|R_{\max}\right| \le \sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta r^3}{24}\cdot\max_{\Gamma}\left|f''(z)\right| = \frac{\Delta r^2}{24}\cdot\max_{\Gamma}\left|f''(z)\right|\cdot\sum_{i=1}^{N}\Delta r = \\ = \frac{\Delta r^2\cdot L(\Gamma)}{24}\cdot\max_{\Gamma}\left|f''(z)\right|, \tag{9}$$

де $L(\Gamma)$ – довжина контуру інтегрування, $\max\limits_{\Gamma}\left|f''(z)\right|$ – максимальне значення другої похідної підінтегральної функції вздовж контуру інтегрування. У разі чисельного задання функції $f(z)$ остання величина може бути обчислена за допомогою кінцевих різниць

$$\max_{\Gamma}\left|f^{(k)}(z)\right| \approx \frac{\max\limits_{\Gamma}\left|\Delta^{(k)}(z_i)\right|}{\Delta r^k}, \tag{10}$$

де $\Delta^k(z_i)$ – кінцева різниця k -го порядку , яка може бути рекурентно розрахована за допомогою кінцевих різниці нижчих порядків як

$$\Delta^{(k)}f(z_i) = \Delta^{(k-1)}f(z_{i+1}) - \Delta^{(k-1)}f(z_i). \tag{11}$$

Верифікація отриманих формул абсолютної похибки чисельного інтегрування функцій комплексної змінної розглядалася на прикладі обчислення інтегралу $\int\limits_0^{2(1+j)} z^4 dz = \frac{32}{5}(1+j)^5$. На рис. 1 наведені отримані залежності похибок чисельного інтегрування $|R_0|$, $|R|$, $|R_{\max}|$ за формулами (1) – (3) від модуля кроку інтегрування. З графіків випливає, що, для малих значень модулю кроку, істинне значення модуля похибки $|R_0|$ добре збігається з наближеним $|R|$. З іншого боку, для максимального значення модуля кроку, який відповідає обчисленню інтеграла за один крок, наближене значення модуля похибки $|R|$ збігається зі значенням оцінки його верхнього граничного значення $|R_{\max}|$. Це є цілком природнім, оскільки при одному кроці інтегрування, формула (2) переходить у формулу (3). Графік залежності логарифму модуля похибки $|R_{\max}|$ від логарифму модуля кроку інтегрування очікувано має лінійний вигляд.

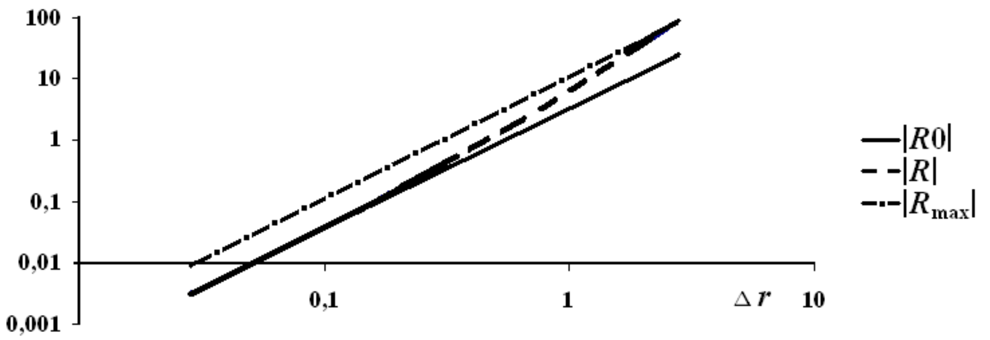

Рисунок 1 – Графіки залежностей похибок чисельного інтегрування від модулю кроку інтегрування

Ще одним прикладом використання розробленого математичного апарату є розрахунок перехідної функції системи автоматичного регулювання нестійкого об’єкту третього порядку з ПД-ПІД-контроллером [3], який був розглянутий у роботі [2] без урахування виникаючих похибок. Структурна схема системи зображена на рис. 2.

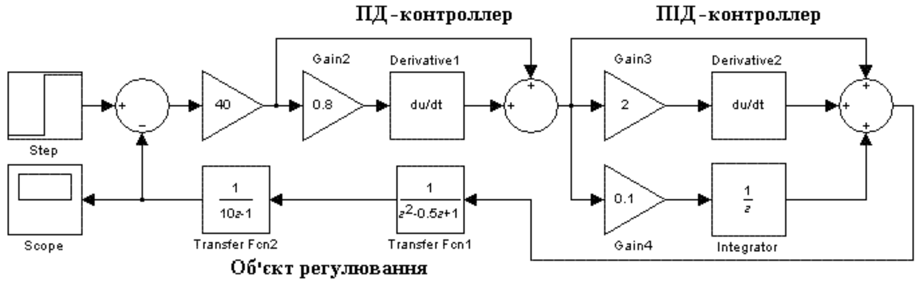

Рисунок 2 – Структурна схема системи автоматичного регулювання з ПД-ПІД-контроллером

В роботі показано, що система є стійкою, а зображення перехідної функції системи має вигляд

$$F(z)=\frac{1}{z}-\frac{-18{,}8+8{,}23z}{10\left(z^2+5{,}45z+10{,}1\right)}-\frac{-0{,}025+1{,}77z}{10\left(z^2+0{,}398z+0{,}04\right)}. \tag{12}$$

Функція $F(z)$ має п'ять полюсів: 0, $-2{,}7\pm1{,}68j$, $-0{,}2\pm0{,}014j$. Оригінал перехідної функції $u(t)$ для зображення $F(z)$ визначався шляхом численного інтегрування за виразом

$$u(t)=\oint_{\Gamma}\exp(z\cdot t)\cdot F(z)dz. \tag{13}$$

Інтегрування здійснювалося за замкненим прямокутним контуром Γ, який охоплює всі полюси зображення і складається з відрізків прямих: $\mathrm{Re}(z)=-3$, $\mathrm{Re}(z)=-3$, $\mathrm{Im}(z)=-2$, $\mathrm{Im}(z)=2$, модуль кроку інтегрування $\Delta r=0{,}04$. Слід зазначити, що, оскільки при обчисленні зворотного перетворення Лапласа, як підінтегральна буде функція $\exp(z\cdot t)\cdot F(z)$, то друга похідна функції, яка використовується при розрахунку величини $|R_{\max}|$ за формулою (9), має вигляд

$$f''(z,t)=\exp(z\cdot t)\cdot F''(z)+2\cdot t\cdot\exp(z\cdot t)\cdot F'(z)+t^2\cdot\exp(z\cdot t)\cdot F(z). \tag{14}$$

На рис. 3 зображено графіки перехідної функції системи автоматичного регулювання, які були отримані аналітичним та чисельним методами.

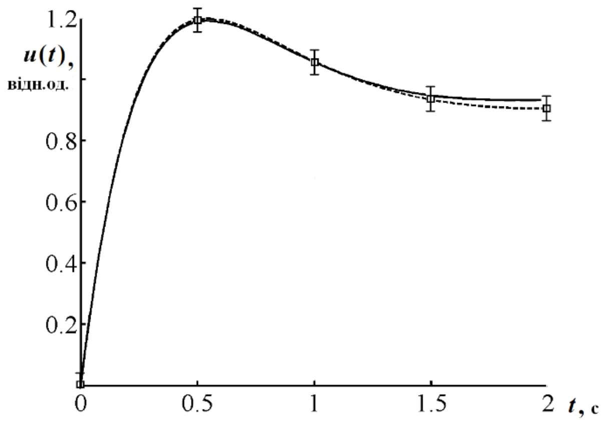

Рисунок 3 – Графіки перехідної функції системи автоматичного регулювання, отримані шляхом розрахунку методами: —— –аналітичним, -------- – чисельним

На графік, який відповідає чисельному методу нанесені похибки інтегрування $|R_{\max}|$. Наведені на рис. 3 криві доводять добру узгодженість чисельного методу розрахунку з аналітичним у межах обчислених похибок.

Висновки.

Таким чином в роботі:

1. Отримані аналітичні співвідношення для розрахунку похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної: модуля локальної похибки на кожному кроці інтегрування, а також істинного, наближеного та верхнього граничного значень модуля похибок за контуром інтегрування. Проаналізовані залежності похибок від модуля кроку інтегрування.
2. За допомогою розробленого раніше методу зворотного перетворення Лапласа на основі чисельного інтегрування та розрахунків перехідної функції системи автоматичного регулювання з ПД-ПІД-контролером, обчислені похибки чисельного методу, які порівнювалися з результатами, отриманими аналітичним методом.

Наукова новизна роботи полягає в отримані аналітичних співвідношень для розрахунку похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної: модуля локальної похибки на кожному кроці інтегрування, а також наближеного та верхнього граничного значення модуля похибок за контуром інтегрування.

Практичним значенням результатів роботи є надана ними можливість отримання напередвизначених похибок чисельного інтегрування функцій комплексної змінної за рахунок вибору кроку інтегрування, шо може бути використано для покращення якості аналізу перехідних процесів у електротехнічних системах та системах автоматичного регулювання.

Список літератури

1. Кожевников А.В. Обоснование выбора численного метода обратного преобразования Лапласа для нахождения оригиналов мероморфных функций с конечным числом полюсов [Текст] / Г.Е. Денисова, А.В. Кожевников // Збірник наукових праць: научн.-техн. сб. – Днепропетровск: НГУ, 2007. – № 27 – С. 184 –192.
2. Кожевников А. В. Применение численного метода обратного преобразования Лапласа при анализе систем автоматического регулирования [Текст] / Г.Е. Кожевников А. В., Цвіркун Л.І. // Гірнича електромеханіка та автоматика: Наук.–техн. зб.– Дніпропетровськ: НГУ, 2017. – Вып.98 – С. 41 – 45.
3. Федосов Б. Т. О стабилизации линейных неустойчивых объектов охватом их обратной связью: [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: http://model.exponenta.ru/bt/ bt_1315_Stab_NeUst.htm#L11.

Аннотация. Целью работы является получение и анализ соотношений для ошибок, возникающих при численном интегрировании функций комплексной переменной. При исследованиях использовались методы математического анализа, теории приближенных вычислений и теории функций комплексного переменного. В результате исследований получены аналитические соотношения для расчета погрешностей численного интегрирования функций комплексной переменной: модуля локальной погрешности на каждом шаге интегрирования, а также истинного, приближенного и верхнего предельного значения модуля погрешностей по контуру интегрирования. Верификация полученных формул абсолютной погрешности численного интегрирования функций комплексной переменной проводилась на примере вычисления интеграла, который имеет аналитическое решение. Построены и проанализированы зависимости погрешностей от модуля шага интегрирования. Для малых значений модуля шага истинное значение модуля погрешности хорошо соответствует приближенному. Для максимального значения модуля шага, который соответствует вычислению интеграла за один шаг, приближенное значение модуля погрешности совпадает со значением оценки его верхнего порогового значения. График зависимости логарифма модуля верхнего граничного значения погрешности от логарифма модуля шага интегрирования имеет линейный характер. Проведены вычисления погрешностей численного метода расчетов переходной функции системы автоматического регулирования с ПД-ПИД-контроллером. Сравнение результатов, полученных аналитическим и численным методами показывает хорошую согласованность численного решения с аналитическим в пределах вычисленных ошибок. Научная новизна работы заключается в получении аналитических соотношений для расчета погрешностей численного интегрирования функций комплексной переменной: модуля локальной погрешности на каждом шаге интегрирования, а также приближенного и верхнего предельного значения модуля погрешностей по контуру интегрирования. Практическая значимость результатов работы состоит в предоставленной возможности получения предопределенных погрешностей численного интегрирования функций комплексной переменной за счет выбора шага интегрирования, что может быть использовано для улучшения качества анализа переходных процессов в электротехнических системах и системах автоматического регулирования

Ключевые слова: численное интегрирование, функция комплексной переменной, погрешность численного метода, обратное преобразование Лапласа.

Annotation. The purpose of work of this work is to obtain and analyze the relations for errors that occur during the numerical integration of functions of a complex variable. The research methods has been used are: mathematical analysis, the theory of approximate calculations and the theory of functions of a complex variable. As a research results, we obtain analytical relations for calculating the errors of complex variable function numerical integration: the modulus of local error at each integration step, as well as the true, approximate and upper limit values of the modulus of errors on the integration contour. Verification of the obtained formulas of absolute errors of complex variable function numerical integration was carried out on the example of calculation of an integral which has an analytical solution. The dependences of the errors on the module of the integration step has been constructed and analyzed. For small values of the step modulus, the true value of the error modulus corresponds well to the approximation. For the maximum value of the modulus of the step, which corresponds to the calculation of the integral for one step, the approximate value of the modulus of error coincides with the value of the estimate of its upper threshold value. The graph of the dependence of the logarithm of the module of the upper limit value of the error on the logarithm of the module of the integration step is linear. The errors of the numerical method for calculating the transient function of an automatic control system with a PD-PID-controller has been calculated. A comparison of the results obtained by analytical and numerical methods shows a good correspodnence of the numerical solution with the analytical within the calculated errors. The scientific novelty of the work is to obtain analytical relations for calculating the errors of complex variable function numerical integration: the modulus of local error at each integration step, as well as the approximate and upper limit of the modulus of errors in the integration contour. The practical significance of work results is ability to obtain predetermined errors of complex variable function numerical integration by choosing the integration step, which can be used to improve the quality of transients analysis in electrotechnical and automatic control systems.

Keywords: numerical integration, complex variable function, numerical method error, inverse Laplace transform.

Рекомендовано до друку: д-ром техн. наук, професором Ткачевим В.В.