

*А.В. Кожевников, Л.И. Цвиркун канд-ты техн. наук
(Украина, Днепр, ГВУЗ "Национальный горный университет")*

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

***Анотація.** Запропонований і програмно реалізований метод зворотного перетворення Лапласа на основі чисельного визначення інтеграла по замкненому прямокутному контуру, який охоплює полюси зображення. Проведені розрахунки перехідних функцій системи автоматичного регулювання нестійкого об'єкта третього порядку з ПД-ПІД регулятором аналітичним та чисельним методами. Виконано порівняння якості зворотного перетворення Лапласа методами, що розглянуті.*

***Ключові слова:** зворотного перетворення Лапласа, чисельним методами, контур інтегрування, система автоматичного регулювання, перехідна функція.*

***Аннотация.** Предложен и программно реализован метод обратного преобразования Лапласа на основе численного определения интеграла по замкнутому прямоугольному контуру, охватывающему полюса изображения. Произведены расчёты переходных функций системы автоматического регулирования неустойчивого объекта третьего порядка с ПД-ПИД регулятором аналитическим и численным методами. Выполнено сравнение качества обратного преобразования Лапласа рассмотренными методами.*

***Ключевые слова:** обратное преобразование Лапласа, численный метод, контур интегрирования, система автоматического регулирования, переходная функция.*

***Annotation.** A method for inverse Laplace transform based on a numerical definition of the integral over a closed rectangular contour which enclose the poles of the image has been proposed and implemented. Calculations of the step response functions of the automatic control system for an unstable third-order object with a PD-PID controller by analytical and numerical methods has been performed. The quality of considered methods of inverse Laplace transform has been compared.*

***Keywords:** inverse Laplace transform, numerical method, integration contour, automatic control system, step response function.*

Введение. Методы решения дифференциальных уравнений с использованием преобразований Лапласа широко используются при решении прикладных задач в различных областях науки: электротехнике, электронике, теории автоматического управления и теплофизике. Такие методы, получившие названия операторных, позволяют приводить дифференциальные уравнения, в которые входит искомая функция-оригинал, к алгебраическим уравнениям относительно изображения этой функции. Полученные уравнения разрешаются относительно функции-изображения, после чего окончательное решение находится путем перехода от полученного изображения к оригиналу. Последний этап решения является наиболее сложным, что обусловлено невозможностью аналитического решения задач обратного преобразования в общем случае, а также проблемами сходимости и устойчивости численных методов решения таких задач.

Анализ существующих достижений и публикаций. Наиболее просто задачи обратного преобразования Лапласа решаются аналитически, в том случае если изображения решений представляют собой дробно-рациональные функции. При этом применяется разложение изображений на элементарные дроби и их почленный перевод в пространство оригиналов с использованием свойства линейности преобразования. Однако при значительном числе полюсов изображения использование такого подхода приводит к громоздким вычислениям. Кроме того, при решении операторными методами дифференциальных уравнений в частных производных могут возникать изображения, не являющиеся дробно-рациональными, в частности мероморфные функции. Под последними понимаются функции комплексного переменного, аналитические во всей плоскости, за исключением счетного множества изолированных полюсов. В таких случаях для получения оригиналов изображений могут быть использованы численные методы обратного преобразования Лапласа, которые систематизированы и представлены в работах [1 – 2]. Данные работы в значительной мере носят теоретический характер и содержат небольшое количество рекомендаций по выбору методов обратного преобразования Лапласа и примеров решения практических задач с их использованием. Вопросам обоснования выбора численного метода обратного преобразования Лапласа для нахождения оригиналов мероморфных функций с конечным числом полюсов применительно к задачам решения волновых уравнений посвящена статья [3]. В ней проведён сравнительный анализ наиболее рас-

пространственных численных методов обратного преобразования Лапласа, а также предложен и обоснован метод нахождения оригиналов мероморфных функций с конечным числом полюсов. Метод основывается на численном определении интеграла по замкнутому контуру, охватывающему полюса изображения. Показана эффективность применения данного метода при обращении изображений, возникающих в результате решения волновых уравнений, которые описывают переходные процессы в длинных линиях.

Формулировка цели и задач исследований. Целью работы является дальнейшее развитие метода обратного преобразования Лапласа, основанного на численном определении интеграла по замкнутому контуру, который охватывает полюса изображения, и его тестирование в задачах анализа систем автоматического регулирования.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи исследований: предложены альтернативные варианты контуров интегрирования и разработаны программные реализации численного определения значений интегралов по таким контурам, произведены расчёты переходных функций неустойчивых объектов с непрерывными регуляторами аналитическим и исследуемым численным методом, выполнено сравнение качества обратного преобразования Лапласа рассмотренными методами.

Изложение основного материала исследований. Обратное преобразование Лапласа, выражающее оригинал – функцию действительной переменной $f(t)$ по изображению, которое является аналитической функцией комплексной переменной $F(p)$, определяется интегралом Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{h-j\infty}^{h+j\infty} \exp(pt)F(p)dp. \quad (1)$$

В работе [1] показано, что если $F(p)$ мероморфна, то в предположении существования оригинала, определяемого соотношением (1), он может быть вычислен как:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \exp(pt)F(p)dp = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} \exp(pt)F(p)dp, \quad (2)$$

где k, n – номер полюса и количество полюсов функции $F(p)$, Γ, Γ_k – замкнутые кусочно-гладкие контура, охватывающие все полюса и k -й полюс функции $F(p)$ соответственно, обходимые против часовой стрелки. Переход от вычисления интеграла к сумме интегралов по контурам позволяет уменьшить суммарную длину контура, по которому осуществляется интегрирование и, как следствие, уменьшить ошибку аппроксимации интеграла конечной суммой при фиксированном числе шагов интегрирования.

Криволинейный интеграл по произвольному контуру Γ в комплексной области может быть представлен в виде:

$$\int_{\Gamma} F(p)dp = \lim_{\max|\Delta p_v| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^{V_{\max}} F(p_v)\Delta p_v, \quad (3)$$

где v – номер элементарного участка интегрирования вдоль контура Γ , V_{\max} – общее количество участков, p_v и Δp_v – значение комплексного аргумента в середине соответствующего элемента контура интегрирования и приращение аргумента на этом элементе.

Переход в выражении (2) от интеграла к конечной сумме, с учетом (3), дает окончательное соотношение для оригинала на основе численного определения значения интеграла по замкнутому контуру, охватывающему полюса изображения:

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi j} \sum_{v=1}^{V_{\max}} [\exp(p_{kv}t)F(p_{kv})\Delta p_{kv}] \quad (4)$$

Наиболее просто для произвольного замкнутого кусочно-гладкого контура, охватывающего заданную точку c на комплексной плоскости, величины p_v и Δp_v могут быть выражены при выборе контура интегрирования в виде окружности с радиусом r и центром в точке c [3]:

$$\begin{aligned} \varphi_v &= 2\pi \frac{v}{v_{\max}}, \quad v = 1, \dots, v_{\max}; \\ p_v &= c + r(\cos \varphi_v + j \sin \varphi_v); \\ \Delta p_v &= r \frac{2\pi}{v_{\max}} (-\sin \varphi_v + j \cos \varphi_v), \end{aligned} \quad (5)$$

где φ_v – полярный угол, соответствующий элементу контура интегрирования Δp_v в полярной системе координат с центром в точке c .

В настоящей работе рассматривается метод интегрирования, использующий прямоугольный контур, который, как показали исследования на рассматриваемом ниже примере, имеет лучшую сходимость к точному решению. Так, при выборе контура интегрирования в виде прямоугольника с основанием a , высотой b и центром в точке c при его обходе против часовой стрелки, начиная с левого нижнего угла, выражения для величин p_v и Δp_v имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \frac{a+b}{v_{\max}}, \quad v = 1, \dots, v_{\max}; \\ p_v &= \begin{cases} c - \frac{a+jb}{2} + \Delta v & \text{при } \frac{v}{v_{\max}} \leq \frac{a}{2(a+b)} \\ c + \frac{a-jb}{2} + j\Delta \left(v - \frac{a}{2(a+b)} v_{\max} \right) & \text{при } \frac{a}{2(a+b)} < \frac{v}{v_{\max}} \leq \frac{1}{2}; \\ c + \frac{a+jb}{2} - \Delta \left(v - \frac{v_{\max}}{2} \right) & \text{при } \frac{1}{2} < \frac{v}{v_{\max}} \leq \frac{2a+b}{2(a+b)} \\ c + \frac{jb-a}{2} - j\Delta \left(v - \frac{2a+b}{2(a+b)} v_{\max} \right) & \text{при } \frac{2a+b}{2(a+b)} < \frac{v}{v_{\max}} \leq 1 \end{cases}; \quad (6) \\ \Delta p_v &= j^m \Delta, \quad m = 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

Здесь Δ – модуль шага интегрирования, m – индекс стороны контура.

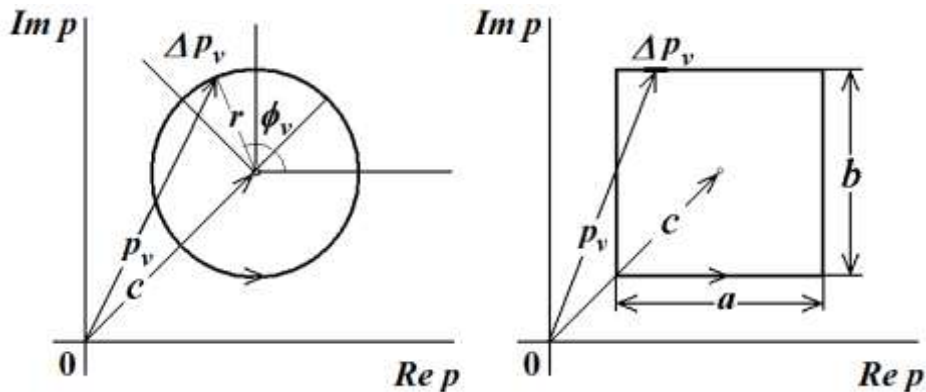


Рис. 1. Среднее значение комплексного аргумента и его приращение на участке интегрирования при выборе контура интегрирования в виде окружности а) и прямоугольника б).

Тестирование предлагаемого метода производилось на примере расчёта переходной функции системы автоматического регулирования неустойчивого объекта третьего порядка с ПД-ПИД регулятором [4] структурная схема которой представлена на рис. 2.

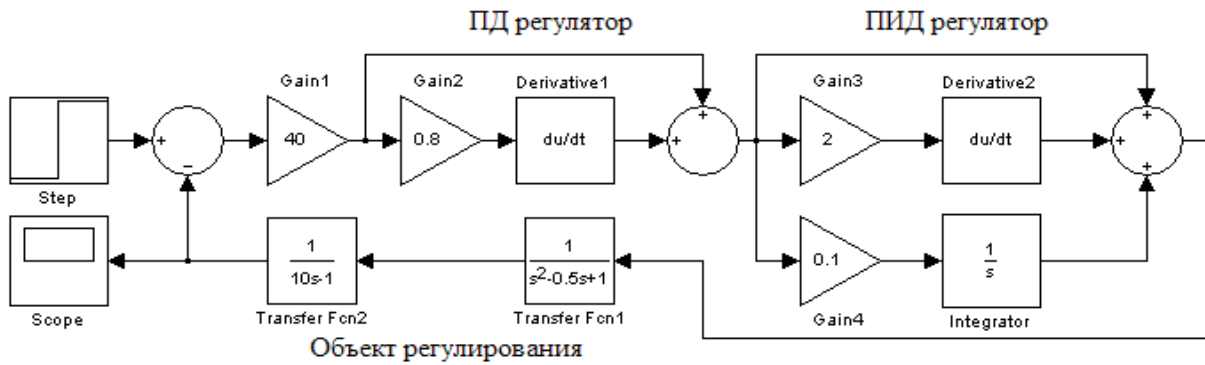


Рис. 2. Структурная схема системы автоматического регулирования

Из структурной схемы следует, что её передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{40(1+0,8p)\left(1+\frac{1}{10p}+2p\right)}{(p^2-0,5p+1)(10p-1)}, \quad (7)$$

а изображение переходной функции системы в замкнутом состоянии записано как:

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{40(1+0,8p)\left(1+\frac{1}{10p}+2p\right)}{(p^2-0,5p+1)(10p-1)}}{1+\frac{40(1+0,8p)\left(1+\frac{1}{10p}+2p\right)}{(p^2-0,5p+1)(10p-1)}}. \quad (8)$$

Характеристический полином системы представляется в виде:

$$Q(p) = p^4 + 0,41p^3 + 6,35p^2 + 2,35p + 0,24, \quad (9)$$

а соответствующий ему годограф Михайлова представлен на рис. 3. Для обеспечения его наглядного представления в широком диапазоне частот, при выполнении условия $|Q(i\omega)| > 2$, для модуля координат точек использовался логарифмический масштаб. Годограф свидетельствует об устойчивости системы.

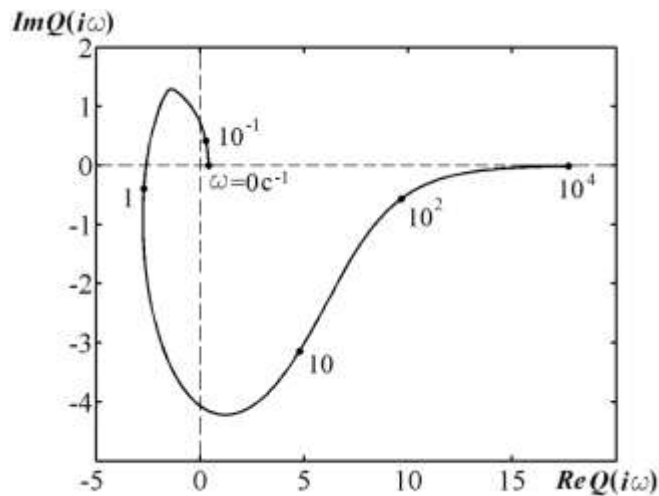


Рис. 3. Годограф Михайлова системы автоматического регулирования

Разложение дробно-рациональной функции (8) на элементарные дроби даёт результат:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{-18,8 + 8,23p}{10(p^2 + 5,45p + 10,1)} - \frac{-0,025 + 1,77p}{10(p^2 + 0,398p + 0,04)}. \quad (10)$$

Функция $F(p)$ имеет пять полюсов: 0 ; $-2,7 \pm 1,68j$; $-0,2 \pm 0,014j$. При переходе от изображения $F(p)$ к оригиналу переходной функции $f(t)$ нулевому полюсу соответствует единичная ступенчатая функция, а комплексно сопряжённым – линейные комбинации гармонических функций с затухающими экспоненциальными множителями. В виду громоздкости полученное аналитическое выражение для оригинала переходной функции здесь не приводится.

При тестировании метода обратного преобразования Лапласа на основе выражений (4) и (6) осуществлялось определение оригинала переходной функции $f(t)$ для изображения $F(p)$ (9) путём численного определения значения интеграла по замкнутому прямоугольному контуру, охватывающему полюса изображения и состоящему из отрезков прямых: $Re p = -3$; $Re p = 1$; $Im p = -2$; $Im p = 2$.

На рис. 4 представлены графики переходной функции системы автоматического регулирования, полученные аналитическим и рассматриваемым численным методами.

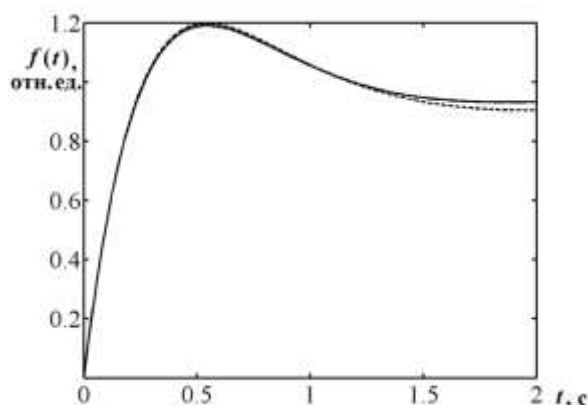


Рис.4. Графики переходной функции системы автоматического регулирования, полученные в результате расчёта методами:
— аналитическим, - - - - - численным.

Рис. 4 показывает, что полученные аналитическим и численным методами графики переходной функции системы автоматического регулирования имеют хорошее соответствие. Последнее свидетельствует о высоком качестве восстановления оригинала предложенным численным методом обратного преобразования Лапласа.

Выводы. Таким образом, в настоящей работе:

1. Для разработанного ранее метода обратного преобразования Лапласа на основе численного определения интеграла по замкнутому контуру, охватывающему полюса изображения, предложен и программно реализован вариант интегрирования по прямоугольным контурам.
2. Произведены расчёты переходных функций системы автоматического регулирования неустойчивого объекта третьего порядка с ПД-ПИД регулятором аналитическим и исследуемым численным методом, выполнено сравнение качества обратного преобразования Лапласа рассмотренными методами.

Список литературы

1. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа [Текст] / В.И. Крылов, Н.С. Скобля – М.: “Наука”, 1974. – 224 с.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования [Текст] / Г. Дёч – М.: “Наука”, 1971. – 288 с.
3. Кожевников А.В. Обоснование выбора численного метода обратного преобразования Лапласа для нахождения оригиналов мероморфных функций с конечным числом полюсов [Текст] / Г.Е. Денисова, А.В. Кожевников // Збірник наукових праць: научн.-техн. сб. – Днепропетровск: НГУ, 2007. – № 27 – С. 184 –192
4. Федосов Б. Т. О стабилизации линейных неустойчивых объектов охватом их обратной связью: [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: http://model.exponenta.ru/bt/bt_1315_Stab_NeUst.htm#L11.

Рекомендовано до друку: д-ром техн. наук, проф. Ткачовим В.В.