

УДК 004.9:004.023

DOI <https://doi.org/10.32782/IT/2023-1-4>

Тімур ЖЕЛДАК

кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри системного аналізу та управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, zheldak.t.a@ntnu.one

ORCID: 0000-0002-4728-5889

Scopus Author ID: 55602208300

Андрій ЖУК

магістр кафедри системного аналізу та управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, A.V.Zhuk@outlook.com

ORCID: 0000-0001-7763-2469

Лариса КОРЯШКІНА

Кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, koriashkina.l.s@ntnu.one

ORCID: 0000-0001-6423-092X

Scopus Author ID: 55844269100

Бібліографічний опис статті: Желдак, Т., Жук, А., Коряшкіна, Л. (2023). Побудова математичної моделі формування змінного графіку роботи персоналу пакувального департаменту підприємства харчової промисловості. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 1, 22–29. doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-1-4>

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ ЗМІННОГО ГРАФІКУ РОБОТИ ПЕРСОНАЛУ ПАКУВАЛЬНОГО ДЕПАРТАМЕНТУ ПІДПРИЄМСТВА ХАРЧОВОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ

Несприятливі політичні та економічні умови змушують підприємства виробничої сфери, зокрема, у харчовій промисловості, відшукувати всі можливості для мінімізації виробничих витрат. Особливо гостро це стосується витрат на персонал в силу наявності цілої низки вимог та обмежень до роботи персоналу. Актуальною вбачається розробка такої математичної моделі процесу пакування продукції, яка б врахувала всі існуючі обмеження і дозволяла оптимізувати мінімальну кількість задіяного персоналу.

Метою роботи є розробка математичної моделі формування змінного графіку роботи персоналу пакувального департаменту підприємства. Це має дозволити зменшити собівартість готової продукції підприємства і досягти цінової переваги у жорстко конкурентному середовищі.

Методологія досягнення рішення полягає у застосуванні наукового узагальнення і систематизації для технологічного процесу пакування на розглянутому підприємстві та призначення того чи іншого персоналу на ті чи інші роботи в певну зміну та пору року. Для формального опису проблеми формування змінного графіку робіт персоналу застосовано методи системного аналізу, формалізації та постановки комбінаторних задач оптимізації.

Наукова новизна отриманих у роботі результатів полягає в розбитті загальної проблеми формування змінного графіку робіт персоналу на три задачі, що вирішуються послідовно. Спочатку мінімізується щоденна кількість робочих змін, потім місячний графік роботи персоналу, і насамкінець – розподіл персоналу по виробничих лініях. Таке розбиття дозволяє, на відміну від відомих раніше методів, вирішувати задачу мінімізації витрат, розглядаючи щоденну кількість персоналу і місячний графік роботи як вже відомі обмеження.

Висновки. Застосування запропонованої математичної моделі формування графіку роботи персоналу департаменту пакування на базовому підприємстві в складі інформаційної системи планування роботи дозволяє за відсутності форс-мажорних обставин зменшити місячні витрати на персонал на 6,5–8,8%.

Ключові слова: модель, теорія розкладів, оптимізація, керування, персонал, виробнича лінія, витрати.

Timur ZHELDAK

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the System Analysis and Control Department, Dnipro University of Technology, 19 Dmytra Yavornytskoho ave., Dnipro, Ukraine, 49005, zheldak.t.a@nmu.one

ORCID: 0000-0002-4728-5889

Scopus Author ID: 55602208300

Andrii ZHUK

Master of the System Analysis and Management Department, Dnipro University of Technology, 19 Dmytra Yavornytskoho ave., Dnipro, Ukraine, 49005, A.V.Zhuk@outlook.com

ORCID: 0000-0001-7763-2469

Larisa KORYASHKINA

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the System Analysis and Management Department, Dnipro University of Technology, 19 Dmytra Yavornytskoho ave., Dnipro, Ukraine, 49005, koriashkina.l.s@nmu.one

ORCID: 0000-0001-6423-092X

Scopus Author ID: 55844269100

Bibliographic description of the article: Zheldak, T., Zhuk, A., Koriashkina, L. (2023). Pobudova matematychnoi modeli formuvannia zminnoho hrafiku roboty personalu pakuvalnoho departamentu pidpriemstva kharchovoi promyslovosti [Development of a mathematical model of the shiftwork formation for the personnel of the packaging department in terms of the food industry enterprise]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 1, 22–29. doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-1-4>

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE SHIFTWORK FORMATION FOR THE PERSONNEL OF THE PACKAGING DEPARTMENT IN TERMS OF THE FOOD INDUSTRY ENTERPRISE

Unfavorable political and economic conditions force enterprises in the production sphere, in particular, in the food industry, to look for all opportunities to minimize production costs. It becomes especially essential for personnel costs due to the presence of several requirements and restrictions on personnel work. The development of such a mathematical model of the product packaging process, which would take into account all existing restrictions and allow optimizing the number of personnel involved, is considered to be relevant.

The purpose of the work is to develop a mathematical model of the shiftwork formation for the personnel of the packaging department in terms of the food industry enterprise. As a result, the cost of the enterprise finished products is reduced. In addition to that, price advantage in a fiercely competitive environment is achieved.

The methodology for reaching a solution consists in applying of scientific generalization and systematization for the technological process of packaging at the enterprise and appointing one or other personnel for certain jobs in a certain shift and time of year. For a formal description of the problem of shiftwork formation for the personnel, the methods of system analysis, formalization and formulation of combinatorial optimization problems are applied.

The scientific novelty of the results obtained in the work consists in division of the general problem of shiftwork formation for the personnel into three tasks which are solved sequentially. First, the daily number of work shifts is minimized, then the monthly work schedule of the personnel, and finally – the distribution of personnel by production lines. Such a division allows, in contrast to previously known methods, to solve the problem of cost minimization, considering the daily number of personnel and the monthly work schedule as already known constraints.

Conclusions. The application of the proposed mathematical model of shiftwork formation for the personnel of the packaging department at the base enterprise as part of the work planning information system allows, in the absence of force majeure circumstances, to reduce monthly personnel costs by 6.5–8.8%.

Key words: model, scheduling theory, optimization, management, personnel, production line, costs.

Актуальність проблеми. Неприятливі політичні та економічні умови змушують підприємства виробничої сфери в Україні, зокрема, у харчовій промисловості, відшукувати всі можливості для мінімізації виробничих витрат. Особливо гостро це стосується витрат на персонал в силу наявності цілої низки вимог та обмежень до роботи персоналу, що визначаються як його

кваліфікацією та досвідом, так і трудовим законодавством.

Одним з провідних лідерів на ринку України є компанія AB InBev Efes Ukraine, яка, незважаючи на нестабільні умови, продовжує свою діяльність, ставить перед собою глобальні цілі і планує досягти їх шляхом оптимізації усієї ланки виробництва, від сировини у полях, до

продукції на полицях магазинів. На думку менеджерів самої компанії, оптимізація виробничого процесу у пакувальному департаменті є одним з найперспективніших напрямків.

Для проведення оптимізації у пакувальному департаменті AB InBev Efes звернувся до кейс-спільноти України Casers (Casers, 2022). Реалізований на основі такої кооперації кейс-чемпіонат мав на меті отримати рішення, яке б допомогло мінімізувати кількість робітників пакувального департаменту за дотриманням певних умов, а саме:

1. На броварні наявні чотири пакувальні лінії на яких випускають продукцію: у склі, у пластиковій тарі, у банці та кегову.

2. Весь персонал пакувального департаменту ділиться на 3 класи та має різну оплату праці. Розподіл на класи відбувається за наступним принципом:

- 1-й клас – може працювати на будь-якій лінії;
- 2-й клас – може працювати на будь-яких двох лініях;
- 3-й клас – вміє (має кваліфікацію) працювати лише на одній.

Відповідно до класності (і універсальності) персоналу змінюються витрати на заробітну плату: для першого класу вони в 1,5 рази вищі за третій клас, для другого – в 1,2 рази. Таким чином, з метою оптимізації роботи пакувального департаменту необхідно було розрахувати щомісячну потребу в персоналі, беручи до уваги те, що плани виробництва та потужності ліній скляної та пластикової пляшки зростають на 10% в період з травня по серпень і спадають на 10% на тих самих лініях з вересня по квітень.

Актуальною науковою задачею в рамках окресленої проблеми вбачається розробка такої математичної моделі процесу пакування продукції, яка б враховувала всі існуючі обмеження і дозволяла оптимізувати витрати на заробітну платню задіяного персоналу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Теорія розкладів – розділ дискретної математики, що вивчає проблеми впорядкування і передбачає як точні так і евристичні алгоритми для їх розв'язання. У загальному випадку проблеми формулюються наступним чином (Bucker, 2007): дано деяку множину робіт (вимог) з певним набором характеристик: тривалість опрацювання вимоги (найпростіший випадок), вартість опрацювання вимоги, момент надходження вимоги, директивний термін закінчення опрацювання вимоги. Задано деяку множину машин (приладів), на яких вимоги мають опрацюватися відповідно до деякого порядку.

Ставиться задача дискретної оптимізації: побудувати розклад, який мінімізує час виконання робіт, вартість робіт тощо. Розклад – вказівка, на яких машинах і в який час мають опрацюватися вимоги (виконуватися роботи).

За дисципліною виконання робіт на машинах можна виділити чотири основні класи задач (Xiong, 2022):

1. Відкрита лінія (англ. Open shop) – для кожної вимоги задано свою підмножину машин, на кожній з яких вона має опрацюватися протягом певного часу. Порядок опрацювання на цих машинах довільний. Здаються різноманітні цільові функції.

2. Робочий цех (англ. Job shop) – для кожної вимоги задано свою впорядковану підмножину машин (маршрут), на яких вона має опрацюватися в заданому порядку. Здаються різноманітні цільові функції.

3. Потокова лінія (англ. Flow shop) – всі машини впорядковано, і кожна вимога проходить всі машини в цьому порядку. Розклад задано перестановкою вимог. Як правило, мінімізується загальний час опрацювання вимог.

4. Задача з директивними термінами – для кожної вимоги задано момент надходження, час опрацювання і директивний термін закінчення опрацювання. Порядок опрацювання на машинах довільний. Необхідно знайти розклад, за якого буде дотримано директивні терміни. При існуванні такого розкладу можна ставити задачу мінімізації числа переривань.

Розв'язання задач першого та другого класів, до яких відноситься розглянута ситуація, виконуються за допомогою ряду точних та евристичних алгоритмів. Зокрема, автори (Calis, 2015) виділяють цілий ряд успішних рішень застосування до окресленої задачі методів штучного інтелекту, таких як нейронна мережа, генетичний алгоритм, багатоагентні системи, імітація відпалу, оптимізація методом моделювання колонії бджіл, оптимізація методом моделювання колонії мурашок, алгоритм рою частинок тощо.

В (Yang, 2008) для розв'язання проблем планування робочих місць запропоновано меметичний алгоритм, заснований на клональному відборі. У запропонованому алгоритмі клональний відбір і механізм локального пошуку призначені для інтенсифікації пошуку рішень в околі поточного рішення. У якості локального пошуку для знаходження локальних оптимумів застосований алгоритм імітації відпалу з використанням околів Новицького та Смутницького.

Натомість автори (Henry, 2014) представляють уніфіковану структуру для розв'язання загальних задач планування робочого цеху

на основі формулювання трьох класів задач, а саме: статичних, напівдинамічних та динамічних задач планування. Алгоритми, засновані на штучних імунних системах, інженерній аналогії імунної системи людини, пропонуються авторами для розв'язання відповідних задач планування робочих місць. Модель високого рівня підтримки прийняття рішень представлена для ефективного розгортання стратегій планування, завдяки чому досягається єдиний підхід до вирішення реальних проблем робочого цеху.

Загалом кожен з авторів наголошує, що хоча планування розкладів роботи персоналу є класичною проблемою в області планування та керування виробництвом, саме планування робочих місць залишається у сучасному надзвичайно динамічному та гнучкому виробничому середовищі найбільш проблемною задачею. Основною причиною є відсутність універсальних моделей для побудови розкладів, які б враховували всі можливі обмеження на конкретному об'єкті дослідження.

Мета дослідження: розробка математичної моделі формування змінного графіку роботи персоналу пакувального департаменту підприємства. Це має дозволити зменшити собівартість готової продукції підприємства і досягти цінової переваги у жорстко конкурентному середовищі.

Виклад основного матеріалу. Задача, що розглядається, на відміну від відомих раніше, має велику комплексність, обумовлену одночасними вимогами до змінності, кваліфікації та видів робіт, які виконуються персоналом на розглянутому підприємстві. З метою отримання ефективного результату при мінімумі обчислювальних витрат пропонується під час математичного моделювання розбити задачу формування змінного графіку роботи персоналу пакувального департаменту на три підзадачі, які будуть вирішуватись послідовно.

Етап 1 – побудова місячного графіку змінної роботи персоналу. Аналізуючи плани виробництва було встановлено, що броварня повинна працювати у безперервному режимі. Відтак, з оглядом на те, що тривалість виробничого процесу перевищує допустиму тривалість роботи, щомісячна потреба в персоналі розраховується у форматі змінної роботи. Виходячи з найбільш поширених графіків позмінної роботи, найбільш доцільним, на думку авторів, є використання п'ятиденного, тризмінного графіку роботи, а саме:

- перша зміна – з 6:00 до 15:00. Час і тривалість перерви – 1 година з 10:00 до 11:00;
- друга зміна – з 14:00 до 23:00. Час і тривалість перерви – 1 година з 18:00 до 19:00;

- третя зміна – з 22:00 до 7:00. Час і тривалість перерви – 1 година з 1:00 до 2:00.

Такий підхід відповідає існуючим нормам у законодавстві України (Кодекс, 2022). Зокрема, стаття 50 КЗпП України говорить: «Нормальна тривалість робочого часу працівників не може перевищувати 40 годин на тиждень». До того ж, стаття 59 КЗпП України стверджує: «Тривалість перерви в роботі між змінами має бути не меншою подвійної тривалості часу роботи в попередній зміні (включаючи і час перерви на обід)».

Виходячи з умов завдання, потужність лінії пакування визначається наступним чином:

$$W_{fact}_{ik}^t = \begin{cases} W_{ik}^t * 1,1, \forall i = 1,2, k = \overline{1,12}: \delta_{ik} = 1; \forall t = \overline{5,8}; \\ W_{ik}^t * 0,9, \forall i = 1,2, k = \overline{1,12}: \delta_{ik} = 1; \forall t = \overline{1,4} \cup \overline{9,12}; \\ W_{ik}^t, \forall i = 3,4, k = \overline{1,12}: \delta_{ik} = 1; \forall t = \overline{1,12}, \end{cases} \quad (1)$$

де i – номер пакувальної лінії, $i = \overline{1,4}$; k – тип продукції, $k = \overline{1,12}$; t – місяць, $t = \overline{1,12}$; δ_{ik} – ознака належності (дорівнює 1, якщо k – та продукція пакується на i – й лінії, або 0 в іншому випадку); W_{ik}^t – звичайна потужність лінії i з пакування k – *мої* продукції в t – *тому* місяці $\forall i, k: \delta_{ik} = 1; \forall t = \overline{1,12}$.

Виходячи з того, що план пакування на усіх лініях (незалежно від типу продукції) заданий в галонах, та потужності кожної лінії також зазначені у галонах/годину, для проведення подальших розрахунків доцільним є представлення плану роботи департаменту в форматі: лінія – кількість годин. Відтак, кількість годин, яка необхідна для роботи i – *мої* лінії, при пакуванні запланованої кількості продукції k – *мого* типу ($\forall i, k: \delta_{ik} = 1$) у місяці t становить:

$$A_{ik}^t = \frac{Plan_k^t}{W_{fact}_{ik}^t}, \quad (2)$$

де $Plan_k^t$ – план пакування k – *мої* продукції в t – *тому* місяці.

Загальна кількість годин роботи пакувальних ліній на місяць дорівнює:

$$Line_hours_i^t = \sum_{k=\overline{1,12}: \delta_{ik}=1} A_{ik}^t. \quad (3)$$

Якщо припустити, що одна робоча зміна триває $Turn$ годин, то можливо розрахувати кількість змін в t – *м* місяці, за які можливо виконати пакування запланованої кількості продукції в склі, пластику, банках та кегах. Зазначимо, що розрахунок буде використовувати округлення вгору до цілого числа, а отриманий надлишок виконання плану буде розміщено на складі.

$$Number_Shifts_i^t = \frac{Line_hours_i^t}{Turn}. \quad (4)$$

У свою чергу максимальна кількість робочих змін в день, з урахуванням рівномірного розподілу усіх змін на місяць, можливо отримати наступним чином:

$$MaxShift_Day^t = \frac{\sum_{i=1}^4 Number_Shifts_i^t}{D^t}, \quad (5)$$

де D^t – кількість днів у місяці.

Середнє значення змін на тиждень визначається формулою:

$$Mean_Week_i^t = \left[\frac{Number_Shifts_i^t}{D^t} * 7 \right]. \quad (6)$$

Припустимо, що робоча неділя розпочинається з 1-го числа. Тоді, нехай x_{id}^t – це кількість змін роботи i -мої лінії, де d – день місяця t ; $0 \leq x_{id}^t \leq 3, x_{id}^t - ціли \forall i = \overline{1,4}; d = \overline{1, D^t}, t = \overline{1, 12}$.

Відтак, необхідно знайти певний набір значень $X = \{x_{id}^t\}$, при якому отримуємо мінімальне значення функції:

$$f_{1t}(x) = \sum_{i=1}^4 \left| \sum_{d=1}^{D^t} x_{id}^t - Number_Shifts_i^t \right| \rightarrow min, \quad (7)$$

за наступних умов:

$$\sum_{d=1}^{D^t} x_{id}^t = Number_Shifts_i^t; \forall i = \overline{1,4}, t = \overline{1,12}, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{id}^t \leq MaxShift_Day^t; \forall d = \overline{1, D^t}, t = \overline{1,12}, \quad (9)$$

$$\sum_{d=1+7*(w-1)}^{7w} x_{id}^t = Mean_Week_i^t; \forall i = \overline{1,2}; t = \overline{1,12}; w = \overline{1,4}, \quad (10)$$

$$\sum_{d=29}^{D^t} x_{id}^t = 3 * (D^t - 27); \forall i = \overline{1,2}, t = \overline{1,12}, \quad (11)$$

де x_{id}^t – кількість змін, яку повинна працювати пакувальна лінія i у певний d -й день місяця t .

Крім того, до обмежень (8) – (11) додатково додаються ті, які описують чергування тижнів роботи ліній кег та банок, а саме:

$$\left(\sum_{d=1+7*(w-1)}^{7w} x_{3d}^t \right) * \left(\sum_{d=1+7*(w-1)}^{7w} x_{4d}^t \right) = 0, w = \overline{1,4}, t = \overline{1,4,9,12}, \quad (12)$$

$$\left(\sum_{d=29}^{D^t} x_{3d}^t \right) * \left(\sum_{d=29}^{D^t} x_{4d}^t \right) = 0, t = \overline{1,12}. \quad (13)$$

Розв'язуючи задачу (7) – (13), можливо отримати необхідну кількість змін на день, з метою забезпечення виконання плану випуску продукції. Проте, варто зазначити, що для дотримання вимог законодавства необхідно на місяць мати таку кількість необхідних змін, яка була б на дві одиниці більша, за величину найбільшої потреби на місяць. Результат розв'язання першої задачі являє собою місячний план робіт пакувальних ліній, який представлений матри-

цею M (див. табл. 1). Елемент $M(i, d)$ – кількість робочих змін на лінії, що відповідає номеру рядка, в день місяця, що відповідає номеру стовпця. Аналогічні плани можуть бути побудовані для кожного довільного місяця. Після оптимального розподілу змін протягом місяця можна переходити до оптимізації зайнятості персоналу.

Етап 2 – оптимізація розкладу зайнятості персоналу. Використовуючи план, який був отриманий за результатом розв'язання попередньої підзадачі, з'являється можливість знайти графік роботи персоналу на місяць.

Цільовою функцією для задачі оптимізації є

$$f_{2t}(x) = \sum_{d=1}^{D^t} \left| \sum_{i=1}^4 M(i, d) - \sum_{s=1}^{S^t} y_{sd}^t \right| \rightarrow min. \quad (14)$$

де s – номер зміни, $s = \overline{1, S^t}$; $S^t = MaxShift_Day^t + 2$; y_{sd}^t – змінна, яка відповідає за те, чи працює зміна s у певний d -тий день місяця t .

Важливим фактором тут є дотримання законодавчих норм стосовно максимальної кількості робочих годин на тиждень. Адже не завжди перший день місяця є першим днем тижня. Відтак обмеження має наступний вигляд:

$$\sum_{d=K_j}^{K_j+Z_j-1} y_{sd}^t \leq F_{sj}; \forall s = \overline{1, S^t}, j = \overline{1, J}, \quad (15)$$

де j – номер тижня, $j = \overline{1, J}$; J – кількість тижнів у місяці; K_j – дата початку тижня; Z_j – кількість днів у тижні; F_{sj} – кількість максимально можливих робочих днів у зміни на певний тиждень. Таким чином оптимізаційна задача пошуку графіку роботи персоналу на місяць має наступний вигляд:

$$f_t(x) = \left| \sum_{d=1}^{D^t} \left(\sum_{i=1}^4 M(i, d) - \sum_{s=1}^{S^t} x_{sd}^t \right) \right| \rightarrow min,$$

$$\sum_{d=K_j}^{K_j+Z_j-1} x_{sd}^t \leq F_{sj}; \forall s = \overline{1, S^t},$$

$$y_{sd}^t = 0 \vee 1 \forall s = \overline{1, S^t}, \forall d = \overline{1, D^t}. \quad (16)$$

Результатом розв'язання даної задачі є матриця $L(s, d)$, один з варіантів якої (для січневого плану) представлений в таблиці 2.

Етап 3 – розподіл працівників по змінах протягом місяця. Після того, як було отри-

Таблиця 1

Кількість робочих змін на лінії в день

січень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
скло	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1
пластик	1	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2
банки	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	0	1	0	1	0	0	0
кеги	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
всього	3	4	4	4	4	4	4	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	5	4	4	4	5	5	5	4	5	4	4	4	5	4

Таблиця 2

Графік роботи персоналу на січень

січень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	всього			
Зміна 1		1	1	1	1			1	1		1	1			1	1	1	1	1			1	1		1	1			1	1			19		
Зміна 2			1	1	1	1			1	1	1	1	1			1	1	1	1				1	1	1	1				1	1			19	
Зміна 3					1	1	1			1	1	1	1	1			1	1	1	1	1			1	1	1	1	1			1			19	
Зміна 4	1	1				1	1	1	1				1	1	1					1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1		19	
Зміна 5	1	1			1	1	1	1			1	1	1	1				1	1	1	1	1			1	1	1	1			1	1		19	
Зміна 6			1	1			1	1	1	1				1	1	1	1			1	1	1	1	1			1	1	1	1			1	1	19
Зміна 7	1	1	1	1					1	1	1			1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1			1	1			19	
Разом	3	4	4	4	4	4	4	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	5	4	4	4	5	5	5	4	5	4	4	4	4	5	4		133	

мано розподіл працівників певної зміни по дням, необхідно виконати їх розподіл вже по конкретним лініям, де вони будуть працювати. Саме ця, остання, підзадача є найбільш відповідальною, адже саме тепер визначаються витрати на персонал та його кількість в тому чи іншому місяці.

Для визначення кількості персоналу у зміні та розмір його оплати праці використовуються наступні позначення, що виходять з попередніх міркувань:

$$Salary_s = \begin{cases} 1,5, \text{працює на більше ніж двох лініях,} \\ 1,2, \text{працює на двох лініях} \\ 1, \text{працює на одній лінії.} \end{cases}, \quad (17)$$

$$Human_s = \begin{cases} 7, \text{якщо зміна працює на першій пакувальній лінії;} \\ 5, \text{інакше.} \end{cases}$$

Цільовою функцією для задачі оптимізації є

$$f_t(x) = \sum_{s=1}^{S^t} Human_s * \left(\frac{Salary_s}{WorkDay} \right) * \sum_{d=1}^{D^t} \sum_{i=1}^4 z_{sid}^t \rightarrow min, \quad (18)$$

де WorkDay – максимальна кількість, можливих, робочих днів у місяць; z_{sid}^t – кількість виходів у певний день d певної зміни працівників s на лінію i .

Задача обмежень полягає у перевірці на те, чи задовольняє отримане рішення тим, які були отримані, як розв’язок двох попередніх:

$$\sum_{s=1}^{S^t} z_{sid}^t = M^t(i, d); \forall i = \overline{1,4}; d = \overline{1, D^t},$$

$$\sum_{i=1}^4 z_{sid}^t = L^t(s, d) \forall d = \overline{1, D^t}, \quad (19)$$

$$z_{sid}^t = 0 \vee 1 \forall d = \overline{1, D^t}, i = \overline{1,4}, s = \overline{1, S^t}.$$

Результатом розв’язання даної задачі є отримання розподілу працівників певної зміни на конкретну пакувальну лінію, що представлена у вигляді набору матриць Q , які аналогічні за розміром з матриці M , а також містить потребу у персоналі та витрати на нього (табл. 3, де с – скло; б – банки; п – пластик; к – кеги). Значення цільової функції $f_1(x)$ для такого розподілу дорівнює 505 тис. грн.

Запропонована в даній статті математична модель може бути застосована в складі інформа-

Таблиця 3

Графік розподілу роботи змін працівників по пакувальних лініях

січень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Кількість робітників в зміні	
Зміна 1		с	с	с	с			с	с		с	с			с	с	с	с	с			с	с		с	с			с	с			7
Зміна 2			п	п	к	к			б	п	п	п	б			к	к	к	п				б	б	п	п				к	п		5
Зміна 3					с	с	с			с	с	с	с	с			с	с	с	с	с			с	с	с	с	с			с		7
Зміна 4	с	п				с	к	с	б				с	с	с					с	с	с	с	с			с	б	с	к	к		5
Зміна 5	п	п			п	п	п	п			п	п	п	п				п	п	п	п	п					п	п	п	п			7
Зміна 6			п	п			п	п	п	п				п	п	п	п			п	п	п	п	п	п			п	п	п	п		7
Зміна 7	с	с	с	с					с	с	б			б	п	п	к	к					б	б	б	п	б				п	п	5
Разом	3	4	4	4	4	4	4	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	5	4	4	4	5	5	5	4	5	4	4	4	4	5	4	

ційної системи підтримки прийняття рішень планування роботи підприємства. Для її застосування на практиці можна використати певний ефективний алгоритм комбінаторної оптимізації. В якості такого алгоритму може бути використаний запропонований авторами раніше для широкого кола задач алгоритм на основі моделювання штучних імунних систем (Zheldak, 2021). Особливості застосування такого алгоритму для викладеної тут задачі є предметом окремого дослідження.

Водночас, використання запропонованої моделі до окремих місяців 2022 року за наданими числовими даними при ручному розрахунку показало її високу ефективність. Зокрема, для місяця березень застосування моделі дозволяє (за відсутності форс-мажорних обставин) зменшити місячні витрати на персонал на 6,5%, для місяця серпень, за тих самих обставин – на 8,8%.

Висновки. Актуальною задачею для підприємств харчової промисловості з великою кількістю ліній пакування є розробка такої математичної моделі процесу пакування продукції, яка б враховувала всі існуючі обмеження і дозволяла оптимізувати мінімальну кількість задіяного персоналу.

В роботі запропоновано математичну модель формування змінного графіку роботи персоналу пакувального департаменту підприємства, що дозволяє зменшити собівартість готової продукції підприємства і досягти цінової переваги у жорстко конкурентному середовищі.

Наукова новизна отриманих у роботі результатів полягає в розбитті загальної проблеми формування змінного графіку робіт персоналу на три задачі, що вирішуються послідовно. Спочатку мінімізується щоденна кількість робочих змін, потім місячний графік роботи персоналу, і насамкінець – розподіл персоналу по виробничих лініях. Таке розбиття дозволяє, на відміну від відомих раніше методів, вирішувати задачу мінімізації витрат, розглядаючи щоденну кількість персоналу і місячний графік роботи як вже відомі обмеження.

Застосування запропонованої математичної моделі формування графіку роботи персоналу департаменту пакування на базовому підприємстві в складі інформаційної системи планування роботи має дозволити за відсутності форс-мажорних обставин зменшити місячні витрати на персонал на 6,5–8,8%.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Casers: Production planning challenge. (2022) URL: <https://casers.org/cases/production-planning-challenge>. (станом на 27.03.2023).
2. Brucker P. Scheduling Algorithms. Springer Berlin, Heidelberg. (2007). – 371 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5>
3. Hegen Xiong, Shuangyuan Shi, Danni Ren, Jinjin Hu A survey of job shop scheduling problem: The types and models. Computers & Operations Research. Volume 142, (2022). – 105731. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.105731> .
4. Çaliş, B., Bulkan, S. A research survey: review of AI solution strategies of job shop scheduling problem. J Intell Manuf 26, 961–973 (2015). <https://doi.org/10.1007/s10845-013-0837-8>
5. Yang, Jh., Sun, L., Lee, H.P. et al. Clonal Selection Based Memetic Algorithm for Job Shop Scheduling Problems. J Bionic Eng 5, 111–119 (2008). [https://doi.org/10.1016/S1672-6529\(08\)60014-1](https://doi.org/10.1016/S1672-6529(08)60014-1)
6. Henry Y.K. Lau, X. Qiu, An Artificial Immune Systems (AIS)-based Unified Framework for General Job Shop Scheduling. IFAC Proceedings Volumes. Volume 47, Issue 3. (2014). – p. 6186-6191. <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01245> .
7. Кодекс законів про працю України : Кодекс України від 10.12.1971 р. № 322-VIII : (станом на 19.08.2022). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/322-08#Text> .
8. Efficiency Improvement of the Algorithm Based on an Artificial Immune System Modeling Applied to Continuous and Combinatorial Problems / Zheldak, T., Ziborov, I., Lyman, V., Zhuk, A. CEUR Workshop Proceedings, 2021, 3106, pp. 82–95.

REFERENCES:

1. Casers: Production planning challenge. (2022) URL: <https://casers.org/cases/production-planning-challenge>. (accessed on 27.03.2023).
2. Brucker P. Scheduling Algorithms. Springer Berlin, Heidelberg. (2007). – 371 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5>
3. Hegen Xiong, Shuangyuan Shi, Danni Ren, Jinjin Hu A survey of job shop scheduling problem: The types and models. Computers & Operations Research. Volume 142, (2022). – 105731. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.105731> .

4. Çalış, B., Bulkan, S. A research survey: review of AI solution strategies of job shop scheduling problem. *J Intell Manuf* 26, 961–973 (2015). <https://doi.org/10.1007/s10845-013-0837-8>
5. Yang, Jh., Sun, L., Lee, H.P. et al. Clonal Selection Based Memetic Algorithm for Job Shop Scheduling Problems. *J Bionic Eng* 5, 111–119 (2008). [https://doi.org/10.1016/S1672-6529\(08\)60014-1](https://doi.org/10.1016/S1672-6529(08)60014-1)
6. Henry Y.K. Lau, X. Qiu, An Artificial Immune Systems (AIS)-based Unified Framework for General Job Shop Scheduling. *IFAC Proceedings Volumes. Volume 47, Issue 3.* (2014). – p. 6186-6191. <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01245> .
7. Code of Labor Laws of Ukraine: Code of Ukraine dated December 10, 1971 No. 322-VIII: (accessed on August 19 2022). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/322-08#Text> .
8. Zheldak T. Efficiency Improvement of the Algorithm Based on an Artificial Immune System Modeling Applied to Continuous and Combinatorial Problems / Zheldak, T., Ziborov, I., Lyman, V., Zhuk, A. // *CEUR Workshop Proceedings*, (2021) – 3106, pp. 82–95.