

УДК 519.8

DOI <https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-2>

Лариса КОРЯШКИНА

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, koriashkina.l.s@nmu.one

ORCID: 0000-0001-6423-092X

Scopus-Author ID: 55844269100

Марина САЗОНОВА

кандидат фізико-математичних наук, доцент, дослідник секції оптимізації та теорії систем кафедри математики, Королівський технологічний інститут (KTH Royal Institute of Technology), офіс 3432, вул. Брінелльвеген, 8, м. Стокгольм, Швеція, SE-100 44, sazonova@kth.se

ORCID: 0000-0002-9513-9659

Микола ОДНОВОЛ

доцент кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, odnovol.m.m@nmu.one

ORCID: 0000-0002-2022-7996

Бібліографічний опис статті: Коряшкіна, Л., Сазонова, М., Одновол, М. (2023). Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів із перекриттям зон обслуговування. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 12–25, doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-2>

АЛГОРИТМИ ТЕРИТОРІАЛЬНОЇ СЕГМЕНТАЦІЇ ДЛЯ МЕРЕЖІ СЕРВІСНИХ ЦЕНТРІВ ІЗ ПЕРЕКРИТТЯМ ЗОН ОБСЛУГОВУВАННЯ

Розглядаються задачі територіальної сегментації заданого регіону на зони обслуговування сервісних центрів. Територія розбивається за критерієм відстані до k найближчих центрів. При моделюванні враховується наступне: самі центри можуть бути функціонуючими або новими, розміщеними у найбільш «вигідних» місцях; їх можливості можуть бути обмеженими. Наведено постановку та чисельний алгоритм розв'язання неперервної лінійної задачі оптимального мультиплексного розбиття обмежених двовимірних множин, яка є математичною моделлю задачі оптимального розміщення сервісних центрів з одночасною територіальною сегментацією на зони їх обслуговування. Продемонстровано роботу цього алгоритму та його окремих випадків: для фіксованого набору центрів; з відшукуванням їх оптимальних координат на заданій множині; з розміщенням додатково кількох центрів та перерозподілом сфер обслуговування для оновленої мережі сервісних центрів.

Ключові слова: територіальне зонування, оптимальне мультиплексне розбиття множин, неперервна модель, розміщення об'єктів, перерозподіл, недиференційовна оптимізація.

Larysa KORASHKINA

PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of System Analysis and Control Dnipro University of Technology, Dmytro Yavornytskyi ave., 19, Dnipro, Ukraine, 49005, koriashkina.l.s@nmu.one

ORCID: 0000-0001-6423-092X

Scopus-Author ID: 55844269100

Maryna SAZONOVA

PhD, Associate Professor, Researcher at the Section of Optimization and Systems Theory of the Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology, office 3432, Brinellvägen str., 8, Stockholm, Sweden, SE-100 44, sazonova@kth.se

ORCID: 0000-0002-9513-9659

Mykola ODNOVOL

Associate Professor at the Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, Dmytro Yavornytskyi ave., 19, Dnipro, Ukraine, 49005, koriashkina.l.s@nmu.one

ORCID: 0000-0002-2022-7996

To cite this article: Koriashkina, L., Sazonova, M., Odnovol, M. (2023). Alhorytmy terytorialnoi sehmentatsii dlia merezhi servisnykh tsentriv iz perekryttiam zon obsluhovuvannia [Algorithms of territorial segmentation for a facility network with overlapping service zones]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 12–25, doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-2>

ALGORITHMS OF TERRITORIAL SEGMENTATION FOR FACILITY NETWORK WITH OVERLAPPING SERVICE ZONES

We consider the problems of territorial segmentation of a given region into service areas for facilities. The optimization criterion is the distance to the k closest centers. When modelling, we consider the following: the centers themselves can be functioning or newly created and located in the most favorable places; they can have limited options. The paper presents a statement and a numerical algorithm for solving a continuous linear problem of optimal multiplex partitioning of bounded sets under constraints. It is a mathematical model of the optimal location of service centers with simultaneous territorial segmentation into their service areas. We demonstrate the work of this algorithm and its cases: for a fixed set of centers, with finding their optimal location on a given set, with the placement of several additional centers and redistribution of service spheres for an updated service network.

Key words: territorial zoning, optimal multiplex partitioning of sets, continuous model, facility location, redistributing, non-differentiable optimization.

Вступ. Розміщення сервісних або виробничих підприємств є класичною проблемою, яка передбачає залучення методів, що оперують з географічною інформацією, включають кількісну оцінку попиту та пропозиції, а також оптимальну організацію комунікаційних мереж. Традиційний аналіз таких задач орієнтований на максимізацію економічної та соціальної вигоди або (та) на мінімізацію транспортних витрат і задоволення попиту на товари та послуги. Це можуть бути довгострокові цілі зростання бізнесу, залучення певних сегментів клієнтів або продаж обмеженої кількості певного продукту. Економічні, демографічні та інфраструктурні умови змінюються у часі, і, отже, місця розташування структурних об'єктів створюваної мережі мають бути адекватно зважені за різними критеріями. Останні, у свою чергу, можуть бути агреговані в єдину цільову функцію (залежно від параметрів, що настроюються), що дозволяє визначити єдиний розв'язок задачі в термінах зважених карт відстаней, прив'язаних до цільової функції. Саме така ідея лежить в основі математичного опису задач оптимальної організації сервісних або виробничих мереж у вигляді неперервних задач оптимального розбиття множин (Kiseleva E., 2015, р. 325–335; Коряшкіна Л.С., 2015, с. 28–36).

Без втрати спільності викладу, як сервісні центри розглядатимемо мережу торгових підприємств. При цьому, за аналогією з роботою (Boots B., 1997, р. 519–536), під моделюванням торгових зон розумітимемо засновані на геометрії процедури створення теоретичних зон з використанням характеристик магазину та припущень про поведінку споживача. Такий підхід є корисним, коли дані про переваги спо-

живачів відсутні, або їх отримання вимагає великої кількості часу або людських ресурсів. Такі моделі варто використовувати для прогнозування торгових зон, для визначення потенційних місць розташування нових об'єктів, оцінювання впливу цих та інших змін на існуючій множині об'єктів.

Будемо вважати, що споживач вибирає k ($k = 1, 2, 3, \dots$) найближчих або найбільш привабливих з N існуючих центрів. Тоді отримані в результаті сегментації торгові зони не будуть взаємовиключними і не визначатимуть просторові монополії.

Метою цієї роботи є розробка алгоритмів територіальної сегментації довільної обмеженої області при різних обмеженнях на основі моделей та методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин (ОМРМ) (Koriashkina L., 2015, р. 15–32). Враховуються такі фактори, як попит та пропозиція на ринку послуг, кількість та розташування існуючих сервісних центрів, неохоплені пропозицією території, місця найбільшої концентрації потенційних клієнтів.

Літературний огляд. Пошук оптимальних місць для розміщення ресурсів є загальною проблемою в різних областях знань (Sahin G., 2007, р. 2310–2331; Mallozzi L., 2018, р. 1–38). Правильне розташування об'єктів, пов'язаних з бізнесом, є важливим для зниження витрат і збільшення прибутку. Кількість можливих комбінацій розподілу ресурсів у реальних задачах зазвичай експоненційно збільшується із входними даними. Іноді знаходження найкращого розв'язку не може бути досягнуто за розумний час. Беручи до уваги NP-повноту задач розміщення, останні роботи використовують

евристику для отримання розумних рішень, як наприклад в роботі (Torkestani S., 2016, 1–22). Lin Y. et al. (Lin Y., 2018, p. 134–144) запропонували алгоритм ройового інтелекту для визначення місцезнаходження об'єкта.

Chen L. et al. [Chen L., 2019.] для оптимізації розміщення каршерингу в одну сторону використовують модель MILP. Представлене в роботі (Lage M.d.O., 2021) дослідження також відноситься до служби каршерингу і спрямоване на виявлення та вибір найкращих місць для встановлення станцій обміну всередині дилерської мережі компанії та обслуговуючої мережі. В роботі залучена географічна інформаційна система (ГІС), яка розраховує просторовий розподіл потенційного попиту на поїздку. Для визначення ідеального розташування станцій запропоновано дві моделі ієрархічного розташування об'єктів. В якості математичного апарату використовувались зважені діаграми Вороного і класична задача Вебера. Критерій оптимізації – максимізація попиту, коли оператор отримує прибуток за рахунок мінімальних перешкод, таких як відстань до станцій.

У статті (Murray A.T., 2020, p. 834–846) обговорюється нещодавно заново відкрита форма класичної проблеми розміщення одного об'єкта Вебера, яка передбачає розміщення виробничого підприємства, де є кілька джерел кожної необхідної сировини (вхідних матеріалів), розподілених по всьому регіону. Це означає, що вибір даного джерела сировини може відрізнятися залежно від місця розташування підприємства. По суті, це робить проблему невивуклою навіть при розміщенні лише одного виробництва. Автори розглядають елементи проблеми Вебера, які розглядалися в літературі разом із запропонованими методами вирішення, висвітлюючи елементи, на сьогоднішній день не реалізовані на практиці – вибір розподілу між кількома джерелами даної сировини.

В роботі (Monteiro S.M., 2021) автори моделюють динаміку можливих клієнтів каршерингу, які шукають доступні ресурси та використовують цей сервіс. Клієнти можуть орендувати автомобіль, якщо є вільний автомобіль на станції відправлення клієнта та вільне місце для паркування на станції призначення клієнта. Якщо немає вільного автомобіля або місця для паркування, потенційні клієнти шукають ці ресурси на інших станціях поблизу місця відправлення та призначення. Разом із симуляцією на основі агентів автопарк оптимізується, щоб обслуговувати якомога більше клієнтів і уникнути марної витрати ресурсів. У цій роботі пропонується змішано-цілочисельна модель лінійного про-

грамування для оптимізації розміру автопарку послуги каршерингу для режимів одностороннього та туди-назад, імітуючи взаємодію клієнтів. Різні сценарії аналізуються з використанням реальних параметрів і просторових даних.

В статті (Wang X, 2018, p. 343–357) розроблено модель континуального наближення (КН) для розв'язання задачі динамічного розміщення об'єктів для великомасштабного зростаючого ринку. Тут визначається оптимальне розташування об'єкта та час розгортання, які мінімізують витрати на будівництво об'єкта та обслуговування клієнтів у горизонті планування. Щоб подолати обчислювальні труднощі, модель КН визначає оптимальну густину об'єктів у просторово-часовому континуумі.

Ще одним поширеним методом розподілу ресурсів є модель розміщення-розподілення (Murray A.T., 2019, p. 1106–1130; Itai Feigenbaum, 2017, p. 434–447), яка передбачає вибір найкращих місць для розміщення ключових об'єктів та визначення того, хто який об'єкт обслуговуватиме.

Існують й інші пов'язані моделі, засновані на проблемі покриття множини місцезнаходження, спрямовані на мінімізацію кількості об'єктів для задоволення попиту (Karatas M., 2017, p. 1040–1051; Karatas M., 2020; Rodriguez S.A., 2020).

Класичні моделі розміщення-розподілення зазвичай зводяться до проблеми р-медіани (PMP). Це одна з найбільш вивчених та використовуваних моделей локалізації для вирішення реальних завдань: враховуючи N точок-кандидатів для об'єктів та M точок попиту із заданою вагою (наприклад, кількість людей, які проживають по сусідству), вибираємо рішення P так, щоб сума витрат відстані від кожної точки M до найближчої точки P була якомога найменшою.

Задачі, в яких регіон, що розбивається, є континуальним, у науковій літературі називають неперервними задачами розбиття множин (Kiseleva E., 2015, p. 325–335). У деяких роботах до розв'язування задач розміщення-розбиття на площині з неперервно розподіленим попитом застосовуються методи обчислювальної геометрії, зокрема такі її фундаментальні об'єкти, як діаграми Вороного та їх узагальнення, наприклад (Kiseleva E., 2015, p. 3–12; Gems A., p. 59–70; Коряшкіна Л.С., 2015, с. 59–76). В роботі (Mallozzi L., 2018, p. 203–220), враховуючи положення деяких об'єктів, вивчається форма оптимальних зон клієнтів у загальній площині попиту, мінімізуючи загальні середні витрати, які залежать від вартості установки

і відстаней переміщення. Також досліджується випадок розмірних об'єктів, що розміщуються.

У роботі (Zheng C., 2020, р. 34407–34417) розроблено метод оптимізації розташування підземної логістичної системи на базі метро (MULS) для транспортування вантажів метрою у періоди непікового навантаження. Розроблено покращену р-медіанну модель, яка враховує чотири фактори впливу. Алгоритм найкоротшого шляху використовується для мінімізації транспортних витрат, тоді як витрати на інші фактори розраховуються на основі зібраних у процесі анкетування даних. Аби оптимально розташувати потенційні станції метро та перекроїти обсяг логістичних послуг шляхом додавання зважених умов використовується діаграма Вороного.

В даний час промисловість та академічні кола переживають еволюцію у розробці додатків для дронів наступного покоління, у тому числі автономних, здатних виконувати завдання без допомоги людини-оператора. В роботі (Lynskey J., 2019) автори запропонували алгоритм оптимального розміщення портів, щоб звести до мінімуму середню відстань, яку дрони повинні долати, на основі набору потенційних місць розташування портів для дронів і завдань, створених у цій галузі.

Моделювання розміщення-розподілу завжди вважалося основною частиною просторового аналізу. Та, як зазначено в роботі (Wolf Gert W., 2022, р. 2741–2775), публікації, пов'язані з розміщенням об'єктів, майже зникли з журналів в останній час. Автор припускає, що однією з основних причин цього є обмежені можливості модулів розміщення-розподілу, реалізованих у пакетах ГІС, що не дозволяє використовувати це програмне забезпечення для вирішення більш складних реальних проблем сьогодення. В зазначеній статті продемонстровано, як можна ефективно вирішувати задачі розміщення-розподілу за допомогою двох програмних пакетів CPLEX® та AIMMS®.

Дослідження (Alghanmi Nusaybah, 2022) спрямовано на огляд та аналіз існуючих моделей розміщення та розподілу POD під час надзвичайних ситуацій у галузі суспільної охорони здоров'я на основі повного та часткового розподілу точок попиту. Крім того, автори порівнюють існуючі моделі на основі їх ключових характеристик, сильних сторін та обмежень. Також обговорюються проблеми та майбутні напрямки досліджень моделей розташування-розподілу POD.

У статті (Lebedeva O., 2022, р. 427–433) розглядається проблема оптимізації зон обслуговування транспортних терміналів районів міста

та доставки вантажів з логістичних центрів. Для вирішення цієї проблеми пропонується застосувати адаптовану для транспортної мережі модель Вороного. Модель розроблено за допомогою геометричних інструментів, застосованих для знаходження карти найкоротших відстаней. Розбудова включає простір, що розбивається на кластери. Математичне формулювання моделі кластера може змінюватися в залежності від розміру міста. Чим більше місто, тим більшими є кількість і розміри кластерів. Для вирішення задачі використовувався модуль програмного комплексу MATLAB, зокрема, алгоритм побудови багатокутників Вороного. Можливості програмного забезпечення дозволили провести кластерний аналіз, а на основі порівняльного аналізу розрахувати ряд значень, що відображають просторове розташування.

Математичними моделями територіальної сегментації ринку послуг можуть виступати неперервні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин (ОМРМ), особливо, коли зони можуть перекриватися (Koriashkina L., 2015, р. 15–32). Питанням, пов'язаним з теоретичним обґрунтуванням методів розв'язання таких задач у різних постановках, а також дослідженню властивостей рішень та практичних додатків таких завдань, присвячені роботи (Коряшкіна Л.С., 2017, с. 97–108; Koriashkina L., 2016, р. 232–240).

Матеріали та методи. Наведемо спочатку визначення розбиття k -го порядку обмеженої множини $\Omega \subset E_2$, що задається скінченною множиною точок простору, та можливі його узагальнення.

Нехай у просторі E_2 задані точки $\tau_i, i = \overline{1, N}$, які далі називатимемо центрами. Введемо наступні позначення: $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ – набір всіх індексів центрів; $M(\mathbf{N}, k)$ – множина всіх k -елементних підмножин множини \mathbf{N} , $|M(\mathbf{N}, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}, l = \overline{1, L}$, – елементи множини $M(\mathbf{N}, k)$; $d(x, y)$ – відстань між точками x і y (може бути L_p -метрикою

$$r_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ або } r_\infty(x, y) = \max_{i=1,2} |x^i - y^i|.$$

У подальшому, якщо не зазначено інше, будемо використовувати евклідову L_2 -метрику.

Розбиття k -го порядку обмеженої множини $\Omega = E_2$, що задається скінченною множиною точок $\tau_i, i = \overline{1, N}$ з E_2 – це сукупність підмножин (зон) k -го порядку для кожного можливого набору центрів $\{\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}\}, \sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\} \in M(\mathbf{N}, k)$:

$$Z(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \bigcup_{l=1, \overline{L}} Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}),$$

зону $Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l})$ формують точки множини Ω , для яких центри $\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}$ є найближчими, тобто

$$Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}) = \left\{ x \in \Omega : \max_{j \in \sigma_l} d(x, \tau_j) \leq \min_{j \in N \setminus \sigma_l} d(x, \tau_j) \right\}, l = \overline{1, L}. \quad (1)$$

При цьому для будь-яких $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $\sigma_m = \{j_1^m, j_2^m, \dots, j_k^m\} \in M(\mathbf{N}, k)$

$$\text{mes}\left(Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}) \cap Z_m(\tau_{j_1^m}, \tau_{j_2^m}, \dots, \tau_{j_k^m})\right) = 0.$$

На практиці часто виникає необхідність задати різні рівні значущості центрів. Якщо кожному центру $\tau_i, i = \overline{1, N}$ поставити у відповідність деяке число $w_i > 0, i = \overline{1, N}$, – його вагу (мультиплікативну), то відстань між точками x і τ_i в (1) визначатиметься за формулою:

$$d(x, \tau_i) = \left(\frac{1}{w_i} \right) r_p(x, \tau_i), i = \overline{1, N}.$$

Якщо кожному центру τ_i відповідає так звана адитивна вага $a_i, i = \overline{1, N}$, то

$$d(x, \tau_i) = r_p(x, \tau_i) + a_i, i = \overline{1, N}.$$

Нехай на множині $\Omega \subset E_2$ задана функція попиту $\rho(x) > 0, x \in \Omega$. Потужністю *Capacity*(τ_i) центру τ_i будемо вважати зважену площу об'єднання всіх зон k -го порядку $Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l})$,

для яких $i \in \sigma_l, l = \overline{1, L}$, тобто

$$\text{Capacity}(\tau_i) = \sum_{l=1, \overline{L}} \int_{Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l})} \gamma_i^l \rho(x) dx, i = \overline{1, N},$$

де коефіцієнти γ_i^l для всіх $i = \overline{1, N}$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\} \in M(\mathbf{N}, k), l = \overline{1, L}$, задовольняють умови:

$$0 \leq \gamma_i^l \leq 1, \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1. \quad (2)$$

В задачі територіальної сегментації кожен центр τ_i може мати свою обмежену потужність $b_i \geq 0$, і на розбитті множини Ω можуть накладатися обмеження:

$$\text{Capacity}(\tau_i) = b_i, i = \overline{1, p},$$

$$\text{Capacity}(\tau_i) \leq b_i, i = \overline{p+1, N}. \quad (3)$$

Для обмежених множин $\Omega \subset E_2$ виконується рівність:

$$\bigcup_{l=1, \overline{L}} Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}) = \Omega. \quad (4)$$

Нехай $\Omega \subset E_2$ – обмежена замкнена множина; $\rho(x) > 0, x \in \Omega$, – задана функція, $\int_{\Omega} \rho(x) dx = S$; $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$, – задані центри. Для існування розбиття k -го порядку з обмеженнями на потужності центрів (3) достатньо виконання наступних умов:

$$0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, p; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^p b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i. \quad (6)$$

Розбиття k -го порядку з обмеженнями на потужності центрів може бути корисними, наприклад, оцінюючи реальні зони обслуговування для сервісних (торгових) підприємств за таких припущеннях:

– співіснування підприємств $\tau_i, i = 1, \dots, N$, що випускають один і той самий товар, причому максимальний обсяг товару, який підприємства можуть забезпечити, обмежений величинами b_1, b_2, \dots, b_N ;

– константи γ_j^l відображають частину ринку, яку займає підприємство τ_j на території

$Z_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l})$ серед підприємств $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$,

що обслуговують цю територію (тут вважається, що $j \in \sigma_l$). Якщо припустити, що ринок товару розподілений між підприємствами по всій області Ω пропорційно їхнім потужностям, то для всіх $l = \overline{1, L}$ і $j = \overline{1, N}$, таких, що $j \in \sigma_l$, величина γ_j^l визначається так: $\gamma_j^l = b_j / \sum_{q: q \in \sigma_l} b_q$.

Тоді обмеження (3) вказують на те, що можливості центрів $\tau_i, i = 1, \dots, p$, мають бути повністю реалізовані, а для решти центрів $\tau_i, i = p+1, \dots, N$, вони є обмеженими.

Перейдемо до викладу єдиного підходу щодо оптимально територіальної сегментації обмеженої області $\Omega \subset E_2$, в основі якого лежать моделі та методи розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин при обмеженнях з критерієм розбиття спеціального виду, що забезпечує врахування тієї чи іншої форми задання уподобань клієнтів та транспортних витрат.

Математична модель задачі оптимального розміщення нових сервісних центрів і перерозподілу сфер обслуговування

Нехай Ω – територія деякого регіону, на якій функціонує мережа сервісних підприємств;

$\widehat{\Omega} \subseteq \Omega$ – територія, де можуть бути розміщені нові центри; $\rho(x)$ – функція, що описує попит на послугу в точці x множини Ω ; N – загальна кількість сервісних підприємств в розширеній мережі; m – кількість функціонуючих центрів ($m < N$), решта – нові, які потрібно розмістити; S – загальний попит на послугу на заданій території Ω ; b_i – потужність i -го центру; $c(x, \tau_i)$ – вартість надання послуги клієнту в точці $x \in \Omega$ центром τ_i , яку будемо вважати пропорційною відстані між двома точками; a_i – вартість облаштування нового центру або модернізації існуючого в точці τ_i , або його фіксовані організаційні витрати, розраховані на одну умовну одиницю попиту, $i = \overline{1, N}$.

Для побудови математичної моделі задачі будемо вважати Ω обмеженою, замкненою множиною з E_2 ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$, для всіх $i = \overline{1, N}$, – деякі точки, причому $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ ($m < N$) є заданими, а координати решти центрів $\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N$ потрібно визначити, $\tau^{N-m} = (\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N) \in \widehat{\Omega} \times \dots \times \widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}^{N-m}$.

Нехай $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – клас всіх можливих розбиттів k -го порядку множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k} = \left\{ \bar{\omega} = \{ \Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L} \} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0, \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Задача А-к. $F(\bar{\omega}, \tau^{N-m}) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k} \\ \tau^{N-m} \in \widehat{\Omega}^{N-m}}}$,

$$F(\bar{\omega}, \tau^{N-m}) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i' \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i' \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \quad (8)$$

Тут $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$; $c(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$ функції. Функція $\rho(x)$ – обмежена, невід'ємна на Ω ; $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$ – задані числа; γ_i' задовольняють умови (3).

Пару $(\bar{\omega}^*, \tau^{N-m*})$, на якій досягається мінімальне значення функціоналу F і виконуються умови (7), (8), будемо називати **оптимальним розв'язком задачі А-к**.

Отже, математичною моделлю задачі оптимального розміщення додаткових (або всіх, коли $m = 0$) центрів мережі сервісних підприємств і перерозподілу сфер обслуговування є неперервна лінійна задача оптимального розбиття k -го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і серед яких можуть бути порожні, при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей із розміщенням центрів $\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N$.

Метод розв'язання задачі А-к

Задачу **А-к** зведемо до задачі нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними.

Нехай $\bar{\omega} = \{ \Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_l}, \dots, \Omega_{\sigma_L} \}$ – деяке розбиття k -го порядку множини Ω . Кожній точці $x \in \Omega_{\sigma_l}$, $l = \overline{1, L}$, поставимо у відповідність NL -вимірний вектор $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$, координати якого визначимо наступним чином:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l}, \quad i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{у протилежному випадку, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (9)$$

де $\sigma_l = \{ j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l \}$ – набір індексів центрів $\{ \tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l} \}$, асоційованих з підмножиною Ω_{σ_l} .

Вектор-функцію $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$, визначену на Ω , з координатами, які задаються формулою (9), будемо називати характеристичною вектор-функцією підмножини Ω_{σ_l} , що є складовою розбиття k -го порядку множини Ω .

Задача В-к. $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^{N-m}) \in \Gamma^k \times \widehat{\Omega}^{N-m}} I(\lambda(\cdot), \tau^{N-m})$,

$$I(\lambda(\cdot), \tau^{N-m}) =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma^k = \{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i' \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i' \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N} \};$$

$$\Gamma_0^k = \{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)) : \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1 \text{ для всіх } x \in \Omega, i = \overline{1, N}$$

$$l = \overline{1, L}, \sum_{l=1}^L \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \}.$$

Далі від задачі **В-к** перейдемо до задачі зі значеннями $\lambda_i^l(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, на відрізок $[0; 1]$ (за аналогією LP-релаксації в дискретній оптимізації).

Задача С-к. $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^{N-m}) \in \Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m}} I(\lambda(\cdot), \tau^{N-m}),$

$$\Gamma_2^k = \{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_1^k,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N} \};$$

$$\Gamma_1^k = \{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)) : 0 \leq \lambda_i^l(x) \leq 1$$

для всіх $x \in \Omega, i = \overline{1, N},$

$$l = \overline{1, L}, \sum_{i=1}^L \lambda_i^l(x) = k, \quad l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \}.$$

Очевидно, $\Gamma_0^k \subset \Gamma_1^k$, внаслідок чого виконується включення $\Gamma^k \subset \Gamma_2^k$. Множина Γ_2^k є обмеженою, замкнутою, опуклою у просторі з нор-

мою $\lambda(\cdot) = \left(\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [\lambda_i^l(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$; крім того, Γ_2^k

містить принаймні одну крайню точку.

Для кожного вектору $\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}$ функціонал $I(\lambda(\cdot), \tau^{N-m})$ є лінійним, неперервним відносно вектор-функції $\lambda(\cdot)$ на Γ_2^k і, згідно теореми Веєрштрасса, досягає на цій множині своєї нижньої границі. Таким чином, задача **С-к** є розв'язною за $\lambda(\cdot)$. Серед множини точок Γ_2^k , в яких лінійний відносно $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda(\cdot), \tau^{N-m})$ при фіксованому $\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}$ досягає на множині Γ_2^k свого мінімального значення, знайдеться принаймні одна крайня точка множини Γ_2^k . Крайні точки Γ_2^k є характеристичними функціями деяких підмножин k -го порядку $\Omega_{\sigma_i}, i = \overline{1, L}$, що складають розбиття k -го порядку множини Ω при кожному фіксованому векторі $\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}$. Отже, множина оптимальних розв'язків задачі **С-к** містить оптимальні розв'язки задачі **В-к**, і остання зводиться до задачі **С-к** і відбору з усіх оптимальних її розв'язків тих, які є розв'язками задачі **В-к**.

Для задачі **С-к** складаємо функціонал Лагранжа:

$$W((\lambda(\cdot), \tau^{N-m}), \psi) =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx +$$

$$+ \sum_{p=1}^N \psi_p \left[\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_l^p \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i \right] =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i) \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i,$$

який визначений на декартовому добутку

$$\left(\Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m} \right) \times \Psi,$$

де $\Psi = \{ \psi \in R^N, \psi_i \geq 0, i = \overline{p+1, N} \}.$

Пару $\left(\left(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\tau}^{N-m} \right), \hat{\psi} \right)$ будемо називати сідловою точкою функціонала Лагранжа $W((\lambda(\cdot), \tau^{N-m}), \psi)$ на множині $\left(\Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m} \right) \times \Psi$,

якщо $\forall (\lambda(\cdot), \tau^{N-m}) \in \Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m}$ і $\forall \psi \in \Psi$ виконується наступна нерівність:

$$W\left(\left(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\tau}^{N-m} \right), \psi \right) \leq W\left(\left(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\tau}^{N-m} \right), \hat{\psi} \right) \leq W\left(\left(\lambda(\cdot), \tau^{N-m} \right), \hat{\psi} \right).$$

Задача, двоїста до задачі **С-к**, має такий вигляд:

$$H(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau^{N-m}) \in \Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m}} W((\lambda(\cdot), \tau^{N-m}), \psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Psi}. \quad (10)$$

Задача (10) є скінченновимірною, на відміну від **С-к**. Аби задачі **С-к** і (7) були пов'язані співвідношенням двоїстості $I_* = W^*$, і верхня грань в двоїстій задачі досягалась, необхідно і достатньо існування сідлової точки функціонала $W((\lambda(\cdot), \tau^{N-m}), \psi)$ в сенсі введеного визначення.

Відтак, розв'язання пари двоїстих задач **С-к** і (10) еквівалентно знаходженню сідлової точки функціоналу Лагранжа $W((\lambda(\cdot), \tau^{N-m}), \psi)$ на множині $\left(\Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m} \right) \times \Psi$.

Зафіксуємо довільний вектор $\bar{\psi} \in \Psi$ і розглянемо задачу

$$W((\lambda(\cdot), \tau^{N-m}), \bar{\psi}) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau^{N-m}) \in \Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m}}, \quad (11)$$

яка є задачею оптимального мультиплексного розбиття множини без обмежень, записаною відносно характеристичних вектор-функцій підмножин $\Omega_{\sigma_i}, i = \overline{1, L}$, що складають розбиття k -го порядку множини Ω . Метод розв'язання цієї задачі докладно описаний у роботі (Коряшкіна Л.С., 2015). Зробивши теоретичні викладки, аналогічні наведеним у зазначеній роботі, можна отримати оптимальний розв'язок задачі (11) у такому вигляді:

для $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \bar{\psi}_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \bar{\psi}_j, \\ & \text{одночасно } \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l; \\ 0 & \text{у протилежному випадку, } i = \overline{1, N}; \end{cases} \quad (12)$$

де $\tau_{*m+1}, \dots, \tau_{*N}$ є оптимальним розв'язком задачі

$$G(\tau^{N-m}, \bar{\psi}) \rightarrow \min_{\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}}, \quad (13)$$

$$G(\tau^{N-m}, \bar{\psi}) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_i \in M(N,k) \\ l=1, \bar{L}}} \sum_{i \in \sigma_i} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i' \bar{\psi}_i] \rho(x) dx. \quad (14)$$

Відтак, аби для фіксованого набору центрів $\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}$ можливе розбиття $(\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_l}, \dots, \Omega_{\sigma_N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множини Ω було оптимальним для задачі **A-k**, необхідно і достатньо існування таких констант $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ ($\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – невід’ємні), що м. в. для $x \in \Omega$

$$c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i' \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j' \psi_j, \quad i \in \sigma_i, j \in N \setminus \sigma_i. \quad (15)$$

В точках x на оптимальній границі між підмножинами Ω_{σ_i} і Ω_{σ_j} в нерівності (12) досягається знак рівності.

Враховуючи (13) – (14), функціонал задачі (10), двоїстої до задачі **C-k**, в наступному уточненому вигляді:

$$H(\psi) = \min_{\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}} \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_i \in M(N,k) \\ l=1, \bar{L}}} \sum_{i \in \sigma_i} [c(x; \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i' \psi_i] \rho(x) dx$$

Сідлова точка функціонала Лагранжа задачі **C-k** на множині $(\Gamma_2^k \times \hat{\Omega}^{N-m}) \times \Psi$ визначається для всіх $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$ так:

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \hat{\tau}_i) / w_i + a_i + \gamma_i' \hat{\psi}_i \leq c(x, \hat{\tau}_j) / w_j + a_j + \gamma_j' \hat{\psi}_j, \\ \quad \forall i \in \sigma_i, j \in N \setminus \sigma_i, \\ 0 \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

де $\hat{\tau}_{m+1}, \dots, \hat{\tau}_N$, $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N$ складають оптимальний розв’язок наступної задачі скінченновимірної умовної оптимізації:

$$G(\psi) = \min_{\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}} G_1(\tau, \psi) \rightarrow \max, \quad (16)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (17)$$

$$G_1(\tau^{N-m}, \psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_i \in M(N,k) \\ l=1, \bar{L}}} \sum_{i \in \sigma_i} \left[\frac{c(x, \tau_i)}{w_i} + a_i + \gamma_i' \psi_i \right] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (18)$$

З усіх розв’язків задачі **C-k** вибираємо ті, що є і розв’язками задачі **B-k**, і приходимо до наступного твердження.

Твердження 1. Оптимальний розв’язок задачі **B-k** має наступний вигляд: для $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i' \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j' \psi_j, \\ \quad \forall i \in \sigma_i, j \in N \setminus \sigma_i, \\ 0 \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

за $\tau_{m+1}, \dots, \tau_N$, ψ_1, \dots, ψ_N вибирається оптимальний розв’язок задачі (16), (17) з негладкою цілювою функцією (18).

Чисельний алгоритм. Від задачі (16) перейдемо до задачі:

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}} U(\tau^N, \psi),$$

$$\text{де } U(\tau^{N-m}, \psi) = G_1(\tau^{N-m}, \psi) - Q \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

Q – додатне число (більше за множники Лагранжа). Далі вектор τ^{N-m} будемо позначати τ . Нехай

$$g_U(\tau, \psi) = (g_U^{\tau}(\tau, \psi), -g_U^{\psi}(\tau, \psi)) = (g_U^{\tau_{m+1}}(\tau, \psi), \dots, g_U^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_U^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_U^{\psi_N}(\tau, \psi))$$

– вектор узагальненого псевдо-градієнта функції $U(\tau^{N-m}, \psi)$ в точці $(\tau, \psi) = (\tau_{m+1}, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$. Його компоненти

$g_U^{j_i}(\tau, \psi)$, $j = m+1, \dots, N$, обчислюємо за допомогою скінченних різниць, оскільки зміна цих координат викликає перерозподіл зон відповідальності не тільки центрів, що розміщуються, але й існуючих. Компоненти $-g_U^{\psi_i}(\tau, \psi)$, $i = 1, \dots, N$, визначаються за формулою:

$$g_U^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_l' \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i, & i = \overline{1, m}, \\ \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_l' \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i + Q \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = \overline{m+1, N}, \end{cases} \quad (19)$$

де $\lambda_i^l(x)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, обчислюються так:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i' \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j' \psi_j, \\ \quad \forall i \in \sigma_i, j \in N \setminus \sigma_i, \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (20)$$

Ключовою частиною алгоритму розв’язання задачі **B-k** є $r(\alpha)$ -алгоритм з константним коефіцієнтом розтягу простору α й адаптивним способом регулювання крокового множника (Шор Н. З., 1999, с. 33–47).

Ініціалізація. Область Ω заключаємо в прямокутник Π , $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Π покриваємо прямокутною сіткою, задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, параметри $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модифікації $r(\alpha)$ – алгоритму.

Крок 1.

Обчислюємо $\lambda^{l(0)}(x) = (\lambda_1^{l(0)}(x), \dots, \lambda_N^{l(0)}(x))$, $l = \overline{1, L}$, $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ і вектор $g_U(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ у вузлах сітки при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$.

Вибираємо початковий крок $h_0 > 0$, задаємо $B_0^x = I_{2(N-m)}$, $B_0^y = I_N$, – квадратні матриці $2(N-m) \times 2(N-m)$, $N \times N$ відповідно, і знаходимо:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(0)} - h_0 g_U^x(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_U^y(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}). \end{aligned}$$

Крок 2. Нехай в результаті обчислень $k, k = 1, 2, \dots$ кроків алгоритму отримано $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}$, $\lambda^{l(k-1)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки, матриці B_k^x, B_k^y .

Опишемо $(k+1)$ -й крок, який включає наступні етапи.

1. Обчислюємо $\lambda^{l(k)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки за формулою (17) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$.

2. Обчислюємо $g_U(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ у вузлах сітки при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(k)}(x)$, $l = \overline{1, L}$.

3. Проводимо чергову ітерацію $r(\alpha)$ -алгоритму, обчислювальна формула якого має вигляд:

$$\begin{aligned} \tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^x \frac{B_{k+1}^T g_U^x(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{B_{k+1}^T g_U^x(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})} \right), \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^y \frac{B_{k+1}^T g_U^y(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{B_{k+1}^T g_U^y(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}. \end{aligned}$$

Тут B_{k+1}^x, B_{k+1}^y – оператори відображення перетвореного простору в основний простір з коефіцієнтом розтягу α , які перераховуються

за формулою $B_{k+1}^w = B_k^w \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_k^w (\theta_k^w)^T \right)$, де

w – змінна τ або ψ , I – одинична матриця відповідного розміру, θ_k^w – нормований вектор різниці двох послідовних псевдоградієнтів в перетвореному просторі, тобто:

$$\theta_k^w = \frac{(B_{k+1}^w)^T (g_U^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_U^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))}{(B_{k+1}^w)^T (g_U^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_U^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))},$$

за умови $(B_{k+1}^w)^T (g_U^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_U^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)})) \geq \varepsilon_0$, і $\theta_k^w = 0$ в решті випадків, ε_0 – точність представлення машинного нуля. Множник h_k регулюється адаптивним способом з параметрами h_0, q_1, q_2, n_h , сообразно якому множ-

ник обирається з умови мінімуму різниці $[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})]$ за напрямом узагальненого антипсевдоградієнта $-g_U(\tau, \psi)$ в перетвореному просторі.

4. Якщо умова $(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - (\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, не виконується, переходимо до $(k+2)$ -го кроку алгоритму з новими значеннями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}$, $\lambda^{l(k)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки, інакше – переходимо до п. 5.

5. Покладемо $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi_* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*^l(x) = \lambda^{l(s)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, де S – номер ітерації, на якій умова закінчення ітераційного процесу виконалася.

6. Обчислюємо оптимальне значення функціоналу вихідної задачі **B-k** при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi_*$, $\lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot)$, $l = \overline{1, L}$ і для контролю правильності розрахунків – значення цільової функції задачі (16) з такими самими параметрами.

Кінець алгоритму.

Для негладких функцій параметри доцільно вибирати наступним чином: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$, де q_1 коефіцієнт зменшення кроку, якщо умова релаксації ітераційного процесу за поточним напрямом спуску виконується за один крок, q_2 – коефіцієнт збільшення кроку, натуральне число n_h ($n_h > 1$) задає кількість кроків одновимірного спуску, після яких крок збільшуватиметься в q_3 разів.

Експерименти. Наведемо результат розв'язання модельних задач оптимального розміщення нових об'єктів деякої мережі сервісних підприємств з перерозподілом сфер обслуговування існуючих і нових підприємств. Для всіх прикладів: $\Omega = \{x \in R^2 : 0 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2\}$; $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$; $w_i = 1, \forall i = \overline{1, N}$; функція відстані – метрика Мінковського з параметром p : $c(x, \tau_i) = \sqrt[p]{(x_1 - \tau_1^i)^p + (x_2 - \tau_2^i)^p}$.

Задача 1. На рис. 1 представлено зонування території до та після розміщення двох нових центрів (7-го та 8-го) за таких початкових даних:

$$N = 8, m = 6, p = 1, k = 1,$$

$$a = (1; 1; 1.2; 1.04; 0.94; 1; 1; 1.18).$$

Значення функціоналу знизилось на 8,4 % з 331,97 до 304,251 одиниць.

З табл. 1 видно, наскільки зменшилося і майже рівномірно розподілилося навантаження на центри після розміщення нових і перерозподілу зон обслуговування.

Далі розглянемо випадки, коли зони обслуговування можуть перекиватися двократно.

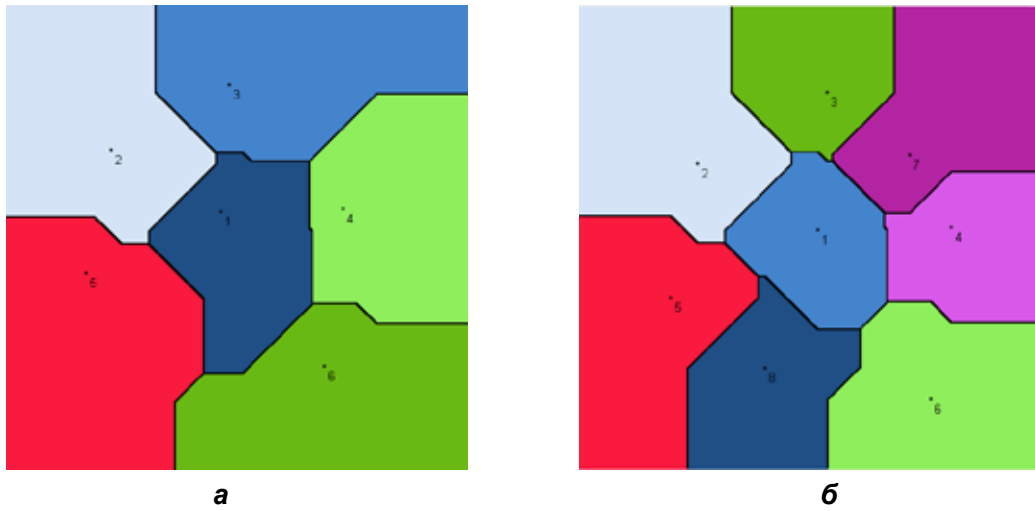


Рис. 1. Монопольні зони обслуговування в задачі 1 для центрів:
 а – шести фіксованих, б – шести фіксованих і двох, оптимально розміщених

Таблиця 1
 Потужності центрів в задачі 1

№ центра	Потужність центра	
	до перерозподілу	після перерозподілу
1	11,189	9,015
2	17,362	17,362
3	17,259	9,434
4	15,218	9,618
5	20,632	15,457
6	18,334	14,406
7	0	14,043
8	0	10,659

Задача 2. Початкові дані: $N = 9, m = 6, p = 2, k = 2$, параметри $a_i, \forall i = 1, N$, наведено в табл. 3.

На рис. 2, а подано оптимальне розбиття другого порядку, отримане у результаті розв'язання задачі ОМРМ без врахування інтегральних обмежень для фіксованих шести центрів. Результат розв'язання задачі ОМРМ, у якій додатково розміщені три центри – 7й, 8й і 9й, наведено на рис. 2, б.

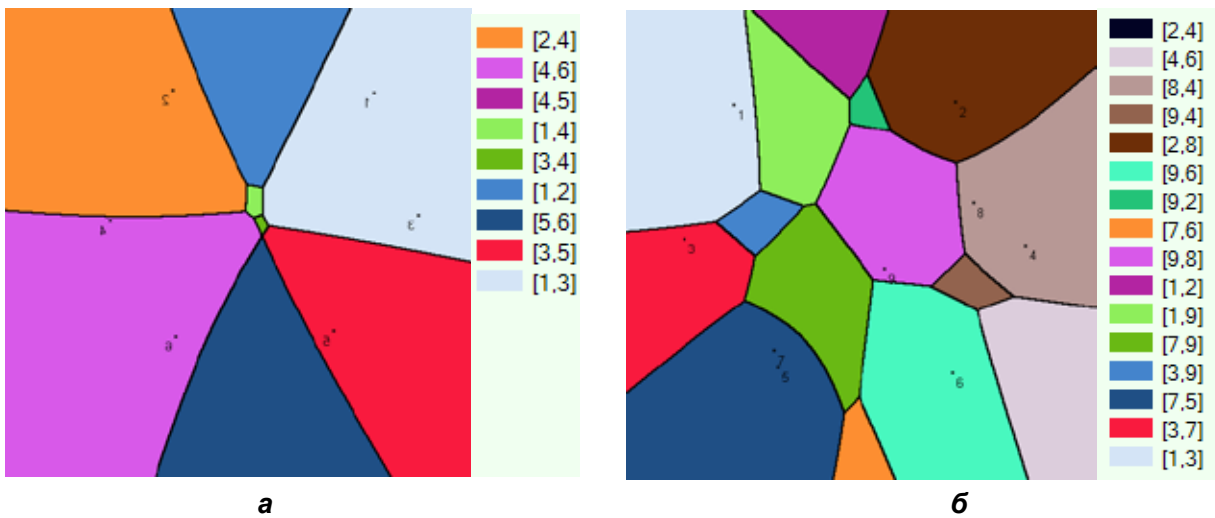


Рис. 2. Дуплексне розбиття множини:
 а – для шести фіксованих центрів, б – для шести фіксованих і трьох оптимально розміщених центрів

Таблиця 2
Навантаження на центри в задачі 3

№ центра		Потужність центра	
		до перерозподілу	після перерозподілу
1	2,139	13,3941	10,2494
2	2,346	13,9087	7,5423
3	2,135	17,0553	9,8256
4	1,335	22,2905	9,7908
5	2,369	14,4236	6,7787
6	1,618	18,9269	10,2223
7	1,63	0	13,8029
8	1,53	0	14,995
9	0,906	0	16,792

За рахунок розміщення трьох додаткових центрів були перерозподілені зони обслуговування старих центрів, перераховано їх потужності. Табл. 2 містить інформацію про те, як змінилося навантаження на старі центри, і яку потужність повинні мати нові центри. У табл. 3 наведені ці зони для кожного центру після розміщення нових. Значення цільового функціоналу зменшилося з 873,586 до 755,162.










З результатів розв'язання тестових задач видно, що розміщення нових центрів має істот-

ний вплив на потужності найближчих до них центрів. Потужності більш віддалених центрів можуть або зменшуватися незначно, або ж залишатися незмінними.

Висновки. У даній роботі описаний підхід щодо територіальної сегментації обмеженої області, заснований на використанні моделей і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Зонування території здійснюється у такий спосіб, що певна зона виявляється не просторовою монополією одного центру, а може обслуговуватися будь-яким з k найближчих або найбільш привабливих центрів. На відміну від досліджених раніше задач ОМРМ тут розглянутий випадок розширення функціонуючої мережі сервісних центрів, коли частина з них вже існує, а декілька нових центрів потрібно розмістити на певній території, в зв'язку з чим одночасно перерозподіляються зони обслуговування для усіх центрів. За допомогою розробленого програмного забезпечення для зонування територій продажу можна швидко оновлювати карти для обліку нових торгових представників та інших незначних змін у бізнесі з мінімальним втручанням.

Таблиця 3

Зони обслуговування після розміщення нових центрів

№	Зона	№	Зона	№	Зона
1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	

Зазвичай, планування розміщення нових сервісних центрів передбачає врахування таких факторів, як наявність комунікацій у місцях передбачуваного розміщення центрів, можливі додаткові витрати на будівництво власних комунікацій, податок на землю тощо. При моделюванні реальних задач сегментації виника-

ють також питання, пов'язані з описом кордонів територій, що сегментуються, обчисленням фактичних відстаней між сервісними центрами та їх клієнтами. Тоді поряд з представленим математичним і алгоритмічним забезпеченням мають залучатися сучасні геоінформаційні технології.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач. *Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф.* 2015. № 18(351). С. 28–36.
2. Kiseleva E., Koriashkina L. Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51. Issue 3. P. 325–335.
3. Boots B., South R. Modeling retail trade areas using higher-order, multiplicatively weighted Voronoi diagrams. *Journal of Retailing* 73. 1997. P. 519–536.
4. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods. *Journal of Computational & Applied Mathematics*. 2015. № 2 (119). P. 15–32
5. Sahin G., Sural H. A review of hierarchical facility location models. *Comput. Oper. Res.* 2007. Vol. 34. P. 2310–2331.
6. Mallozzi L., Puerto J., Rodríguez-Madrena M. On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2018. P. 1–38.
7. Torkestani S.S., Seyedhosseini S.M., Makui A. Hierarchical Facility Location and Hub Network Problems: A literature review. *J. Ind. Syst. Eng.* 2016. Vol. 9. P. 1–22.
8. Lin Y., Jia H., Yang Y., Tian G., Tao F., Ling L. An improved artificial bee colony for facility location allocation problem of end-of-life vehicles recovery network. *J. Clean. Prod.* 2018. Vol. 205. P. 134–144.
9. Chen L., Zhang W., Ma J., Wang L. Newly-added Station Location-allocation in One-way Station-based Carsharing Systems. *In Proceedings of the 2019 Chinese Control Conference (CCC), Guangzhou, China, 27–30 July 2019*. Vol. 2019.
10. Wang X, Lim M, Ouyang Y. A Continuum Approximation Approach to the Dynamic Facility Location Problem in a Growing Market. *Transportation Science*. 2018. 51:1. P. 343–357.
11. Lage M.d.O., Machado C.A.S., Monteiro C.M., Davis C.A. Jr., Yamamura C.L.K., Berssaneti F.T., Quintanilha J.A. Using Hierarchical Facility Location, Single Facility Approach, and GIS in Carsharing Services. *Sustainability*. 2021. 13, 12704. <https://doi.org/10.3390/su132212704>
12. Murray A.T., Church R.L., Feng X. Single facility siting involving allocation decisions. *Eur. J. Oper. Res.* 2020. Vol. 284. P. 834–846.
13. Monteiro C.M., Machado C.A.S., Lage M.O., Berssaneti F.T., Davis C.A., Quintanilha J.A. Optimization of carsharing fleet size to maximize the number of clients served. *Comput. Environ. Urban Syst.* 2021. Vol. 87. 101623.
14. Murray A.T., Xu J., Wang Z., Church R.L. Commercial GIS location analytics: Capabilities and performance. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 2019. Vol. 33. P. 1106–1130.
15. Itai Feigenbaum, Jay Sethuraman, Chun Ye. Approximately optimal mechanisms for strategyproof facility location: Minimizing Lp norm of costs. *Mathematics of Operations Research*. 2017. Vol. 42 (2). P. 434–447,
16. Karatas M. A multi-objective facility location problem in the presence of variable gradual coverage performance and cooperative cover. *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 262. P. 1040–1051.
17. Karatas M., Dasci A. A two-level facility location and sizing problem for maximal coverage. *Comput. Ind. Eng.* 2020. Vol. 139. 106204.
18. Rodriguez S.A., De la Fuente R.A., Aguayo M.M. A facility location and equipment emplacement technique model with expected coverage for the location of fire stations in the Concepción province, Chile. *Comput. Ind. Eng.* 2020. Vol. 147, 106522.
19. Zheng C., Zhao X., Shen J. Research on Location Optimization of Metro-Based Underground Logistics System with Voronoi diagram. *IEEE Access* 2020. Vol. 8. P. 34407–34417.
20. Kiseleva E., Koriashkina L. The Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing the Voronoi Diagram and its Generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi Diagrams based on the theory of optimal partitioning of sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, Issue 4. P. 3–12.

21. Gemsa A., Lee D., Liu C.H., Wagner D. Higher Order City Voronoi Diagrams. *Proc. 13th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT'12). Helsinki, 2012. (Lecture Notes in Computer Science; Vol. 7357)*. P. 59–70.
22. Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П. Оптимальные диаграммы Вороного высших порядков ограниченных множеств и алгоритмы их построения. *Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика*. 2016. №. 1-2. С. 59–76.
23. Mallozzi L., Justo P. The geometry of optimal partitions in location problems. *Optimization Letters* 12. 2018. P. 203-220.
24. Lynskey J., Thar K., Oo T.Z., Hong C.S. Facility Location Problem Approach for Distributed Drones. *Symmetry*. 2019. 11. 118. <https://doi.org/10.3390/sym11010118>
25. Wolf Gert W. Solving location-allocation problems with professional optimization software. *Transactions in GIS* 26. 2022. P. 2741–2775.
26. Alghanmi Nusaybah, Alotaibi Reem, Alshammari Sultanah, Alhothali Areej, Bamasag Omaimah, Faisal Kamil. A Survey of Location-Allocation of Points of Dispensing During Public Health Emergencies *Front. Public Health, 10 March 2022 Sec. Disaster and Emergency Medicine*. 2022. Vol. 10. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.811858>
27. Lebedeva O., Kripak M., Gozbenko V. Increasing effectiveness of the transportation network by using the automation of a Voronoi diagram. *Transp. Res. Procedia*. 2018. Vol. 36. P. 427–433.
28. Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П., Коряшкіна Е.О. Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2017. № 4. С. 97–108.
29. Koriashkina L., Cherevatenko A., Mykhalova O. The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets. *Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control. Annual Proceedings*. 2016. P. 233–240.
30. Шор Н. З., Бардадым Т. А., Журбенко Н. Г., Лиховид А. П., Стецюк П. И. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования. *Кибернетика и системный анализ*. 1999. № 5. С. 33–47.

REFERENCES:

1. Koriashkina L.S. (2015). Rozshyrennia odnogo klasu neskinchenovymirnykh optymizatsiinykh zadach. *Visn. Cherkaskoho un-tu. Ser. Prykl. matem. Inf.* № 18(351). S. 28–36 [in Ukrainian].
2. Kiseleva E., Koriashkina L. Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, Issue 3. P.325–335.
3. Boots B., South R. Modeling retail trade areas using higher-order, multiplicatively weighted Voronoi diagrams. *Journal of Retailing* 73. 1997. P. 519–536.
4. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods. *Journal of Computational & Applied Mathematics*. 2015. № 2 (119). P. 15–32
5. Sahin G., Sural H. A review of hierarchical facility location models. *Comput. Oper. Res.* 2007. Vol. 34. P. 2310–2331.
6. Mallozzi L., Puerto J., Rodríguez-Madrena M. On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2018. P. 1–38.
7. Torkestani S.S., Seyedhosseini S.M., Makui A. Hierarchical Facility Location and Hub Network Problems: A literature review. *J. Ind. Syst. Eng.* 2016. Vol. 9, P. 1–22.
8. Lin Y., Jia H., Yang Y., Tian G., Tao F., Ling L. An improved artificial bee colony for facility location allocation problem of end-of-life vehicles recovery network. *J. Clean. Prod.* 2018. Vol. 205. P. 134–144.
9. Chen L., Zhang W., Ma J., Wang L. Newly-added Station Location-allocation in One-way Station-based Carsharing Systems. *In Proceedings of the 2019 Chinese Control Conference (CCC), Guangzhou, China, 27–30 July 2019*. Vol. 2019.
10. Wang X, Lim M, Ouyang Y. A Continuum Approximation Approach to the Dynamic Facility Location Problem in a Growing Market. *Transportation Science*. 2018. 51:1. P. 343–357.
11. Lage M.d.O., Machado C.A.S., Monteiro C.M., Davis C.A. Jr., Yamamura C.L.K., Berssaneti F.T., Quintanilha J.A. Using Hierarchical Facility Location, Single Facility Approach, and GIS in Carsharing Services. *Sustainability*. 2021. 13, 12704. <https://doi.org/10.3390/su132212704>
12. Murray A.T., Church R.L., Feng X. Single facility siting involving allocation decisions. *Eur. J. Oper. Res.* 2020. Vol. 284. P. 834–846.

13. Monteiro C.M., Machado C.A.S., Lage M.O., Berssaneti F.T., Davis C.A., Quintanilha J.A. Optimization of carsharing fleet size to maximize the number of clients served. *Comput. Environ. Urban Syst.* 2021. Vol. 87. 101623.
14. Murray A.T., Xu J., Wang Z., Church R.L. Commercial GIS location analytics: Capabilities and performance. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 2019. Vol. 33. P. 1106–1130.
15. Itai Feigenbaum, Jay Sethuraman, Chun Ye. Approximately optimal mechanisms for strategyproof facility location: Minimizing Lp norm of costs. *Mathematics of Operations Research.* 2017. Vol. 42 (2). P. 434–447,
16. Karatas M. A multi-objective facility location problem in the presence of variable gradual coverage performance and cooperative cover. *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 262. P. 1040–1051.
17. Karatas M., Dasci A. A two-level facility location and sizing problem for maximal coverage. *Comput. Ind. Eng.* 2020. Vol. 139. 106204.
18. Rodriguez S.A., De la Fuente R.A., Aguayo M.M. A facility location and equipment emplacement technique model with expected coverage for the location of fire stations in the Concepción province, Chile. *Comput. Ind. Eng.* 2020. Vol. 147, 106522.
19. Zheng C., Zhao X., Shen J. Research on Location Optimization of Metro-Based Underground Logistics System with Voronoi diagram. *IEEE Access* 2020. Vol. 8. P. 34407–34417.
20. Kiseleva E., Koriashkina L. The Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing the Voronoi Diagram and its Generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi Diagrams based on the theory of optimal partitioning of sets. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. Vol. 51, Issue 4. P. 3–12.
21. Gemsa A., Lee D., Liu C.H., Wagner D. Higher Order City Voronoi Diagrams. *Proc. 13th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT'12). Helsinki, 2012. (Lecture Notes in Computer Science; Vol. 7357).* P. 59–70.
22. Korjashkina L.S., Cherevatenko A.P. (2016). Optimal'nye diagrammy Voronogo vysshih porjadkov ogranichennyh mnozhestv i algoritmy ih postroeniya. *Visnik Cherkas'kogo universitetu. Serija Prikladna matematika. Informatika.* №. 1-2. S. 59–76 [in Russian].
23. Mallozzi L., Justo P. The geometry of optimal partitions in location problems. *Optimization Letters* 12. 2018. P. 203-220.
24. Lynskey J., Thar K., Oo T.Z., Hong C.S. Facility Location Problem Approach for Distributed Drones. *Symmetry.* 2019. 11. 118. <https://doi.org/10.3390/sym11010118>
25. Wolf Gert W. Solving location-allocation problems with professional optimization software. *Transactions in GIS* 26. 2022. P. 2741–2775.
26. Alghanmi Nusaybah, Alotaibi Reem, Alshammari Sultanah, Alhothali Areej, Bamasag Omaimah, Faisal Kamil. A Survey of Location-Allocation of Points of Dispensing During Public Health Emergencies *Front. Public Health, 10 March 2022 Sec. Disaster and Emergency Medicine.* 2022. Vol. 10. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.811858>
27. Lebedeva O., Kripak M., Gozbenko V. Increasing effectiveness of the transportation network by using the automation of a Voronoi diagram. *Transp. Res. Procedia.* 2018. Vol. 36. P. 427–433.
28. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P., Koriashkina E.O. Intehratsiia HIS-tekhnohohii i metodiv rozviazannia neperervnykh zadach optymalnoho multypleksnoho rozbytta mnozhyn. *Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii.* 2017. № 4. S. 97–108 [in Ukrainian].
29. Koriashkina L., Cherevatenko A., Mykhalova O. The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets. *Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control. Annual Proceedings.* 2016. P. 233–240.
30. Shor N. Z., Bardadym T. A., Zhurbenko N. G., Lihovid A. P., Stecjuk P. I. Ispol'zovanie metodov negladkoj optimizacii v zadachah stohasticheskogo programmirovaniya. *Kibernetika i sistemnyj analiz.* 1999. № 5. S. 33–47 [in Russian].