

УДК 004.93

DOI <https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-6>

Сергій ПРИХОДЬКО

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, Україна, 54007, sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua

ORCID: 0000-0002-2325-018X

Scopus Author ID: 55225622100

Артем ТРУХОВ

аспірант кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, Україна, 54007, timka357@gmail.com

ORCID: 0000-0002-7160-8609

Бібліографічний опис статті: Приходько, С., Трухов, А. (2023). Побудова правил прийняття рішень для розпізнавання облич на основі квадрата відстані Махаланобіса для нормалізованих даних. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 50–58, doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-6>

ПОБУДОВА ПРАВИЛ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБЛИЧ НА ОСНОВІ КВАДРАТА ВІДСТАНІ МАХАЛАНОБІСА ДЛЯ НОРМАЛІЗОВАНИХ ДАНИХ

Розпізнавання облич є одним із завдань розпізнавання образів, яке стає все більш популярним через широке застосування в комп'ютерному зорі, системах безпеки та ін. Низька ймовірність ідентифікації особи за обличчям може мати негативні наслідки. Тому існує потреба в розробці та вдосконаленні методів розпізнавання облич.

Один із широко використовуваних методів розпізнавання образів базується на застосуванні вирішальних правил на основі квадрата відстані Махаланобіса. Квадрат відстані Махаланобіса використовується для побудови еліпсоїда прогнозування. Але суттєвим обмеженням його використання є необхідність виконання припущення про нормальність розподілу багатовимірних даних, порушення якого як правило призводить до зменшення ймовірності розпізнавання.

Метою роботи є підвищення ймовірності розпізнавання облич за рахунок побудови правил прийняття рішень на основі квадрата відстані Махаланобіса для десятивимірних нормалізованих даних характеристик обличчя.

Для отримання вектору характеристик обличчя з використанням бібліотеки Dlib було розроблено програму мовою Python. Для оцінювання відхилення від нормального розподілу даних було використано тест Mardia. Досліджено, що отримані вибірки характеристик обличчя мають розподіл, який відхиляється від нормального, тому була виконана нормалізація за допомогою відомого одновимірного перетворення у вигляді десяткового логарифму. На основі квадрата відстані Махаланобіса побудовані правила прийняття рішень у вигляді десятивимірних еліпсоїдів прогнозування для початкових та нормалізованих даних. Вирішальні правила, побудовані для нормалізованих даних, показали більшу ймовірність розпізнавання облич.

Результати доводять, що нормалізація збільшує ймовірність розпізнавання облич у разі суттєвого відхилення багатовимірного розподілу характеристик обличчя від нормального. Також було з'ясовано, що у разі існування високої кореляції між характеристиками обличчя, застосування одновимірних нормалізуючих перетворень не завжди призводить до добрих результатів розпізнавання. У цьому разі потрібно використовувати багатовимірні нормалізуючі перетворення, такі як Бокса-Кокса або Джонсона.

Ключові слова: розпізнавання облич, відстань Махаланобіса, еліпсоїд прогнозування, нормалізація, Dlib, багатовимірний нормальний розподіл.

Sergiy PRYKHODKO

Dr.Sc., Professor, Head of the Department of Software for Automated Systems, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Heroiv Ukrainy ave., 9, Mykolaiv, Ukraine, 54007, sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua

ORCID: 0000-0002-2325-018X

Scopus Author ID: 55225622100

Artem TRUKHOV

Postgraduate Student at the Department of Software for Automated Systems, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Heroiv Ukrainy ave., 9, Mykolaiv, Ukraine, 54007, timka357@gmail.com

ORCID: 0000-0002-7160-8609

To cite this article: Prykhodko, S., Trukhov, A. (2023). Pobudova pravyl pryiniattia rishen dlia rozpoznavannia oblych na osnovi kvadrata vidstani Makhalanobisa dlia normalizovanykh danykh [Construction of decision rules for face recognition based on the squared Mahalanobis distance for normalized data]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 50–58, doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-6>

CONSTRUCTION OF DECISION RULES FOR FACE RECOGNITION BASED ON THE SQUARED MAHALANOBIS DISTANCE FOR NORMALIZED DATA

Face recognition is one of the tasks of pattern recognition, which is becoming more and more popular due to its wide application in computer vision, security systems, etc. The low probability of identifying a person by face can have negative consequences. Therefore, there is a need to develop and improve face recognition methods.

One of the widely used pattern recognition methods is based on the application of decision rules based on the squared Mahalanobis distance. The squared Mahalanobis distance is used to construct the prediction ellipsoid. But a significant limitation of its use is the need to fulfill the assumption about the normality of the distribution of multidimensional data, the violation of which usually leads to a decrease in the probability of recognition.

The aim of the work is to increase the probability of face recognition by building decision rules based on the squared Mahalanobis distance for ten-dimensional normalized data of face characteristics.

A Python program was developed to obtain a vector of face characteristics using the Dlib library. The Mardia test was used to assess the deviation from the normal distribution of the data. It was investigated that the received samples of facial characteristics have a distribution that deviates from normal, so normalization was performed using the well-known one-dimensional transformation in the form of a decimal logarithm. Based on the squared Mahalanobis distance, decision rules are built in the form of ten-dimensional prediction ellipsoids for initial and normalized data. Decision rules built for normalized data showed a higher probability of recognizing faces.

The results prove that normalization increases the probability of face recognition in case of significant deviation of the multidimensional distribution of face characteristics from normal. It was also found that in the case of high correlation between facial features, the application of one-dimensional normalizing transformations does not always lead to good recognition results. In this case, it is necessary to use multivariate normalizing transformations, such as Box-Cox or Johnson.

Key words: *face recognition, Mahalanobis distance, prediction ellipsoid, normalization, Dlib, multivariate normal distribution.*

Вступ. Розпізнавання облич є одним із завдань розпізнавання образів, яке стає все більш популярним через широке застосування в комп'ютерному зорі, системах безпеки та ін. Процес розпізнавання обличчя передбачає автоматичну ідентифікацію людини за відмінними рисами, включаючи форму очей, носа, рота та інші характеристики (Beham, 2013).

Ймовірність розпізнавання обличчя за його характеристиками суттєво залежить від правила прийняття рішення, або вирішального правила, яке застосовується. Правила прийняття рішень є математичними виразами або алгоритмами, які визначають, до якого класу розпізнавання належить образ, застосовуючи заданий алфавіт (Довбиш, 2015).

Статистичні методи розпізнавання образів, як правило, використовують вирішальні правила, які базуються на припущенні про нормальність розподілу (Webb, 2011; Sen, 2015). Реальні дані, як правило, мають багатовимірний розподіл, який відхиляється від нормального, що призводить до помилкових результатів розпізнавання.

Актуальність роботи. Технологія розпізнавання облич стає все більш важливою в різних сферах. Низька ймовірність ідентифікації осіб може мати негативні наслідки з точки зору безпеки, зручності та персоналізації. Тому існує потреба в розробці та вдосконаленні методів розпізнавання облич.

Аналіз останніх досліджень. Статистичні методи розпізнавання образів проводять

аналіз характеристик об'єкту, які описуються векторами для створення статистичної моделі обличчя. Для побудови вирішальних правил існують різні підходи, однак один із найпоширеніших методів базується на використанні відстані Махаланобіса (Nader, 2014; Hamill, 2016), значення квадрату якого для i -ої точки даних обчислюється за наступною формулою:

$$D^2(x_i) = (x_i - \bar{x})^T S^{-1} (x_i - \bar{x}), \quad (1)$$

де \bar{x} – вектор вибіркового середнього;

x_i – вектор даних в i -ій точці;

S – вибіркова коваріаційна матриця даних.

Квадрат відстані Махаланобіса має широке застосування в статистиці та аналізі багатовимірних даних для розпізнавання, класифікації і виявлення викидів. Квадрат відстані Махаланобіса приблизно відповідає розподілу Хі-квадрат з k ступенями свободи, що дорівнює числу характеристик, та враховує кореляцію між змінними, тобто, враховується розкид даних відносно центру (Etherington, 2021; Brereton, 2014). Це можна використовувати для побудови еліпсоїда прогнозування, який описує простір допустимих значень (Ghorbani, 2019), таким чином усі спостереження одного класу повинні лежати в межах цього еліпсоїда, а іншого класу – поза межами. На основі (1) правило прийняття рішення набуває вигляду (Brereton 2021; Van Aelst, 2009):

$$D^2(x_i) \leq \chi^2(q, k), \quad (2)$$

де q – рівень значущості;

k – кількість ступенів свободи.

Побудова еліпсоїда базується на припущенні про багатовимірний нормальний розподіл даних (Gallego, 2013). Однак реальні дані можуть мати відмінний від нормального багатовимірний розподіл, що призводить до зниження ймовірності розпізнавання. Для вирішення певних практичних задач, які базуються на використанні відстані Махаланобіса, у випадку негаусівських даних застосовується нормалізація (Meshkani, 2011; Prykhodko, 2018; Prykhodko, 2020). Її застосування дозволяє здійснювати розв'язання відповідних задач для даних, багатовимірний розподіл яких відхиляється від нормального.

Метою роботи є підвищення ймовірності розпізнавання облич за рахунок побудови правил прийняття рішень на основі квадрата відстані Махаланобіса для десятидимірних нормалізованих даних характеристик обличчя.

Виклад основного матеріалу дослідження. Вибір набору даних має вирішальне

значення для побудови правил прийняття рішень. Для дослідження було обрано відомий набір даних Pins Face Recognition (Burak, 2019), який використовується при будові вирішальних правил (Saib, 2021). З метою забезпечення надійності та точності дослідження, було проведено фільтрацію набору даних, після чого здійснено додаткове завантаження фотографій з відкритих ресурсів та розширення набору. Всього було отримано 400 високоякісних фотографій, по 200 для кожного з двох облич.

Формування вектору характеристик.

Одним з найважливіших завдань розпізнавання обличчя є пошук ключових точок, таких як очі, ніс та рот. Коли орієнтири виявлені, їх можна використовувати для обчислення відстаней між різними частинами обличчя. Потім на основі цих відстаней формуються характеристики для представлення об'єкту, які можна порівняти з характеристиками іншого обличчя для розпізнавання (Harry, 2014).

Для створення векторів характеристик була створена програма мовою Python з використанням бібліотеки комп'ютерного зору Dlib. Dlib – це потужний інструмент з відкритим вихідним кодом, яка надає набір методів для широкого спектру завдань комп'ютерного зору, включаючи виявлення обличчя, пошук ключових точок та виділення характеристик. Бібліотека використовує надійний набір із 68 ключових точок для точного представлення контурів об'єкту (Войко, 2018; Khabarлак, 2021).

Алгоритм роботи програми складається з кількох кроків, які виконуються послідовно для досягнення бажаних результатів. Спочатку програма знаходить обличчя на вхідному зображенні за допомогою алгоритму пошуку Dlib. На другому кроці видаляється задній фон, а лице вирівнюється таким чином, щоб очі були на одному рівні. Така обробка допомагає усунути деякі спотворення, викликані положенням обличчя на вхідному зображенні (Haghpanah, 2022; Amato, 2018). На третьому кроці програма отримує набір характеристик із вирівняного зображення. Кожна риса – це відстань між орієнтирами на обличчі, визначеними бібліотекою Dlib.

Формуючи вектор характеристик необхідно керуватися кінцевими цілями та обмеженнями інструментів, що використовуються. Зазвичай бібліотеки комп'ютерного зору мають свої власні недоліки. У даному випадку, використання Dlib для розпізнавання країв обличчя може призвести до спотворень в векторі характеристик, особливо коли голова повернута. Проаналізувавши наявні роботи (Osman, 2015; Vijarnia, 2016; Juhong, 2017; Li, 2018; Gaber, 2021), було

вирішено зосередитися на 17 найбільш інформативних ключових точках, що використовуються для вимірювання 15 різних відстаней обличчя. На основі цих відстаней було створено вектор, який містить 10 характеристик (рис. 1).

Для мінімізації впливу положення обличчя на зображенні та його віддаленості використовується нормування за допомогою ділення кожної характеристики вектору на базову відстань між очима (Johnston, 2018; Wu, 2018).

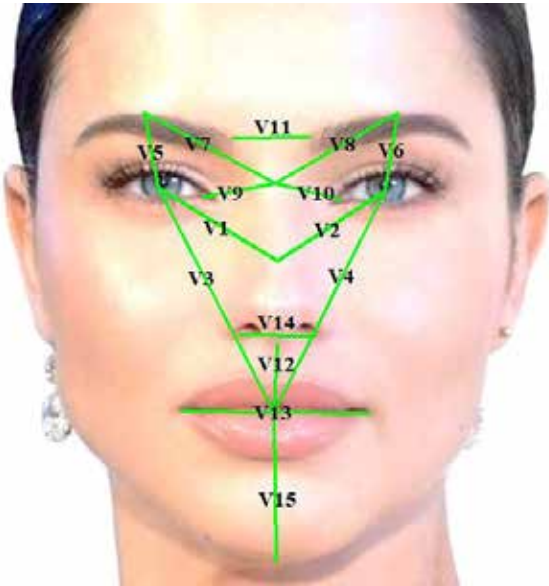


Рис. 1. Відстані між ключовими точками обличчя, які використовуються для розпізнавання

Вектор характеристик складається з 10 змінних, при тому симетричні дистанції усереднюються (Nestor, 2012) (таблиця 1).

Таблиця 1

Опис вектору характеристик

№ характеристики	Формула	Опис
1	$(v1 + v2) / 2$	Усереднена відстань від очей до середини носа
2	$(v3 + v4) / 2$	Усереднена відстань від очей до центру рота
3	$(v5 + v6) / 2$	Усереднена відстань від очей до центру брів
4	$(v7 + v8) / 2$	Усереднена відстань від брів до верху носа
5	$(v9 + v10) / 2$	Усереднена відстань від куточків очей до верху носа
6	$v11$	Відстань між бровами
7	$v12$	Відстань між носом і серединою рота
8	$v13$	Ширина рота
9	$v14$	Ширина носу
10	$v15$	Відстань від рота до підборіддя

Характеристики отриманих вибірок. Для кожної людини було використано по 200 фотографій, з яких 100 використовувалися для побудови правил прийняття рішень, а ще 100 – для тестування та оцінювання якості розпізнавання. Після отримання векторів характеристик було сформовано по одній навчальній вибірці для кожної особи.

Вектор вибірових середніх значень першої людини для побудови вирішальних правил складається з наступних елементів $\bar{x} = [0,6269; 1,2482; 0,3175; 0,6744; 0,3004; 0,3921; 0,3571; 0,8588; 0,4196; 0,7886]$. У таблиці 2 представлено коваріаційну матрицю вибірки першої людини, таблиця 3 містить діапазони значень характеристик.

Таблиця 2

Коваріаційна матриця вибірки першої людини

0,0016	0,0013	-0,0006	0,0001	-0,0001	0,0006	-0,0005	-0,0003	0,0001	-0,0016
0,0013	0,0030	-0,0002	0,0002	-0,0001	0,0002	0,0009	-0,0012	0,0001	0,0001
-0,0006	-0,0002	0,0013	0,0007	0,0000	0,0008	0,0004	0,0004	-0,0001	0,0007
0,0001	0,0002	0,0007	0,0008	0,0000	0,0012	0,0001	0,0004	-0,0001	0,0002
-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0001
0,0006	0,0002	0,0008	0,0012	-0,0001	0,0027	-0,0003	0,0005	-0,0003	-0,0004
-0,0005	0,0009	0,0004	0,0001	0,0000	-0,0003	0,0013	-0,0007	-0,0002	0,0015
-0,0003	-0,0012	0,0004	0,0004	-0,0001	0,0005	-0,0007	0,0054	0,0010	0,0016
0,0001	0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0003	-0,0002	0,0010	0,0007	0,0000
-0,0016	0,0001	0,0007	0,0002	0,0001	-0,0004	0,0015	0,0016	0,0000	0,0055

Таблиця 3

Діапазони характеристик вибірки першої людини

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Min	0,5467	1,0959	0,2497	0,6123	0,2800	0,2733	0,2772	0,7142	0,3672	0,6209
Max	0,7049	1,4012	0,4268	0,7411	0,3271	0,5064	0,4868	1,0782	0,4835	0,9104

Вектор вибірових середніх значень другої людини для побудови вирішальних правил дорівнює $\bar{x} = [0,6330; 1,1629; 0,3010; 0,6259; 0,2994; 0,3670; 0,3015; 0,8011; 0,3584; 0,6290]$. Коваріаційна матриця вибірки другої людини зображена в таблиці 4, діапазони характеристик – в таблиці 5.

Оцінювання багатовимірного відхилення розподілу даних від нормального. Для оцінювання відхилення багатовимірного розподілу даних від нормального використано тест Мардіа. Він заснований на аналізі багатовимірних асиметрії B_1 та ексцесу B_2 даних (Mardia, 1970), які є показниками того, наскільки дані відхиляються від нормального розподілу та обчислюються за наступними формулами:

$$B_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})\}^3, \quad (3)$$

$$B_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})\}^2. \quad (4)$$

Величина асиметрії, розрахована за допомогою формули (3), помножена на $n/6$, розподілена за законом Хі-квадрат з $p(p+1)(p+2)/6$ ступенями свободи, де p – це кількість змінних, в даному випадку 10, а величина ексцесу, розрахована за допомогою формули (4), розподілена згідно із законом нормального розподілу із математичним сподіванням $p(p+2)$ і дисперсією $8p(p+2)/n$ (Mardia, 1974).

Відповідно до тесту Мардіа багатовимірні розподіли даних вибірок відхиляються від нормального закону, тому що значення тестових статистик розподілів вибірок першої та другої людини для багатовимірної асиметрії

$B_1 n/6$ 279,98 та 289,20 перевищують значення квантиля розподілу Хі-квадрат, що становить 277,77 для 220 ступенів свободи та рівня значущості 0,005. Натомість, тестові статистики розподілів вибірок першої та другої людини для багатовимірного ексцесу B_2 122,46 та 122,35 не перевищують значення квантиля розподілу Гауса, яке становить 127,97 для математичного сподівання 120 і дисперсії 9,6 та рівня значущості 0,005.

На основі (2) вирішальне правило для початкових даних, за допомогою якого виконується розпізнавання облич та віднесення їх до класу 1 або 2, де значення квантиля розподілу Хі-квадрат становить 25,19 для 10 ступенів свободи та рівня значущості 0,005, матиме вигляд:

$$(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \leq X^2(10, 0,995), \quad (5)$$

Для перевірки якості розпізнавання вирішального правила, побудованого для кожної вибірки, тестовий набір складається зі 100 тестових векторів характеристик даної вибірки та 200 векторів характеристик іншої вибірки. Для вирішального правила (5), побудованого на основі даних вибірки першої людини, відсоток помилок першого роду становить 4 %, а другого – 12,5 %. Для вирішального правила (5), побудованого на основі вибірки другої людини, відсоток помилок першого роду становить 8 %, а другого – 4,5 %.

Така ймовірність помилок розпізнавання обумовлена тим, що використання квадрата відстані Махаланобіса базується на припущенні про нормальність розподілу даних. Розподіл обраних вибірок відхиляється від нормального, відповідно виникає необхідність використання нормалізуючого перетворення.

Таблиця 4

Коваріаційна матриця вибірки другої людини

0,0010	0,0009	-0,0006	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0005	0,0000	0,0003	-0,0011
0,0009	0,0020	0,0000	0,0003	-0,0002	0,0001	0,0005	0,0000	0,0005	0,0002
-0,0006	0,0000	0,0011	0,0005	0,0000	0,0002	0,0007	-0,0001	-0,0001	0,0012
-0,0001	0,0003	0,0005	0,0004	0,0000	0,0002	0,0003	-0,0003	-0,0001	0,0003
-0,0001	-0,0002	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0001
-0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0000	0,0007	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
-0,0005	0,0005	0,0007	0,0003	0,0000	0,0003	0,0012	-0,0002	-0,0001	0,0015
0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0003	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0028	0,0010	0,0013
0,0003	0,0005	-0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0010	0,0010	0,0002
-0,0011	0,0002	0,0012	0,0003	0,0001	0,0000	0,0015	0,0013	0,0002	0,0042

Таблиця 5

Діапазони характеристик вибірки другої людини

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Min	0,5573	1,0703	0,2400	0,5778	0,2729	0,3109	0,2261	0,6987	0,2933	0,4681
Max	0,7085	1,2873	0,3958	0,6698	0,3217	0,4316	0,3996	1,0007	0,4604	0,8095

Нормалізація даних була здійснена за допомогою перетворення у вигляді десятичного логарифму, вектор нормалізованих величин \mathbf{z} визначається наступним чином:

$$\mathbf{z} = \lg(\mathbf{x}). \quad (6)$$

В результаті застосування перетворення (6) нормалізовані дані не відхиляються від багатовимірного нормального розподілу, адже для нормалізованих даних значення тестових статистик розподілів вибірок першої та другої людини для багатовимірної асиметрії $B_{1,n/6}$ 277,45 та 277,05 не перевищують критичного значення 277,77; тестові статистики розподілів вибірок першої та другої людини для багатовимірного ексцесу B_2 120,95 та 121,36 менше за критичне значення 127,97.

На основі (2) вирішальне правило для нормалізованих даних матиме вигляд:

$$(\mathbf{z}_i - \bar{\mathbf{z}})^T \mathbf{S}_z^{-1} (\mathbf{z}_i - \bar{\mathbf{z}}) \leq \chi^2(10, 0,995), \quad (7)$$

де $\bar{\mathbf{z}}$ – вектор вибірових середніх нормалізованих даних;

\mathbf{S}_z – вибіркова коваріаційна матриця нормалізованих даних.

Використання правила прийняття рішення (7) для нормалізованих даних першої людини

дозволило знизити відсоток помилок першого роду з 4 % до 2 %, другого роду – з 12,5 % до 3,5 %. Застосування вирішального правила (7) для нормалізованих даних другої людини дало можливість знизити рівень помилок першого роду з 8 % до 5 %, але, на жаль, помилки другого роду зросли на 1 %. Це пояснюється тим, що одновимірне перетворення (6) не враховує кореляцію між характеристиками та передбачає, що змінні є незалежними (Fischer, 2016). Вибіркові коваріаційні матриці \mathbf{S}_z для правил прийняття рішень для нормалізованих даних (7) наведені в таблицях 6 та 7.

Висновки. Удосконалено правило прийняття рішення для розпізнавання облич на основі застосування квадрата відстані Махаланобіса для нормалізованих даних з 10 характеристик за допомогою перетворення десятичного логарифма, що дозволяє підвищити ймовірність відповідного розпізнавання у разі задовільної нормалізації.

В подальшому планується побудова правил прийняття рішень для розпізнавання облич із застосуванням квадрату відстані Махаланобіса для нормалізованих даних на основі багатовимірних перетворень, які дозволять врахувати кореляцію між характеристиками, за рахунок чого підвищити ймовірність розпізнавання.

Таблиця 6

Коваріаційна матриця нормалізованої вибірки першої людини

0,0007	0,0003	-0,0006	0,0000	-0,0001	0,0004	-0,0005	-0,0001	0,0001	-0,0006
0,0003	0,0004	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0001	0,0004	-0,0002	0,0000	0,0000
-0,0006	-0,0001	0,0025	0,0007	0,0000	0,0012	0,0007	0,0002	-0,0002	0,0006
0,0000	0,0000	0,0007	0,0003	0,0000	0,0008	0,0001	0,0001	-0,0001	0,0001
-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0001
0,0004	0,0001	0,0012	0,0008	-0,0001	0,0034	-0,0005	0,0003	-0,0004	-0,0002
-0,0005	0,0004	0,0007	0,0001	0,0000	-0,0005	0,0019	-0,0005	-0,0003	0,0011
-0,0001	-0,0002	0,0002	0,0001	-0,0001	0,0003	-0,0005	0,0013	0,0005	0,0004
0,0001	0,0000	-0,0002	-0,0001	0,0000	-0,0004	-0,0003	0,0005	0,0007	0,0000
-0,0006	0,0000	0,0006	0,0001	0,0001	-0,0002	0,0011	0,0004	0,0000	0,0018

Таблиця 7

Коваріаційна матриця нормалізованої вибірки другої людини

0.0005	0.0002	-0.0006	0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0005	0.0000	0.0003	-0.0005
0.0002	0.0003	0.0000	0.0001	-0.0001	0.0000	0.0003	0.0000	0.0002	0.0001
-0.0006	0.0000	0.0023	0.0005	0.0000	0.0003	0.0014	-0.0001	-0.0002	0.0012
0.0000	0.0001	0.0005	0.0002	0.0000	0.0001	0.0003	-0.0001	-0.0001	0.0002
-0.0001	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0002	0.0001
-0.0001	0.0000	0.0003	0.0001	0.0000	0.0010	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0005	0.0003	0.0014	0.0003	0.0001	0.0004	0.0024	-0.0001	-0.0002	0.0015
0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0008	0.0006	0.0005
0.0003	0.0002	-0.0002	-0.0001	-0.0002	0.0000	-0.0002	0.0006	0.0015	0.0001
-0.0005	0.0001	0.0012	0.0002	0.0001	0.0000	0.0015	0.0005	0.0001	0.0020

ЛІТЕРАТУРА:

1. Довбиш, А. С., І. В. Шелехов. Основи теорії розпізнавання образів : навч. посіб. : у 2-х ч. Суми : Сумський державний університет, 2015. 109 с.
2. Amato, Giuseppe, et al. A comparison of face verification with facial landmarks and deep features. 10th International Conference on Advances in Multimedia (MMEDIA). 2018.
3. Beham, M. Parisa, and S. Mohamed Mansoor Roomi. A review of face recognition methods. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2013.
4. Bijarnia, Saroj, and Preeti Singh. Age invariant face recognition using minimal geometrical facial features. *Advanced Computing and Communication Technologies: Proceedings of the 9th ICACCT*, 2015. Springer Singapore, 2016.
5. Boyko, Nataliya, Oleg Basystiuk, and Nataliya Shakhovska. Performance evaluation and comparison of software for face recognition, based on dlib and opencv library. 2018 IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP). IEEE, 2018.
6. Brereton, Richard G. The chi squared and multinormal distributions. *Journal of Chemometrics* 29.1, 2015 : 9–12.
7. Brereton, Richard G. Multivariate classification models. *Journal of Chemometrics* 35.12, 2021 : e3332.
8. Burak. Dataset Pins Face Recognition. 2019. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/hereisburak/pins-face-recognition> (дата звернення: 08.02.2023).
9. Etherington, Thomas R. Mahalanobis distances for ecological niche modelling and outlier detection: implications of sample size, error, and bias for selecting and parameterising a multivariate location and scatter method. *PeerJ* 9, 2021 : e11436.
10. Fischer, Christoph. Comparing the logarithmic transformation and the box-cox transformation for individual tree basal area increment models. *Forest Science*, 2016.
11. Gaber, Amira, et al. SVM classification of facial functions based on facial landmarks and animation Units. *Biomedical Physics & Engineering Express* 7.5, 2021.
12. Gallego, Guillermo, et al. On the Mahalanobis distance classification criterion for multidimensional normal distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013.
13. Ghorbani, Hamid. Mahalanobis distance and its application for detecting multivariate outliers. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 2019.
14. Haghpanah, Mohammad A., et al. Real-time facial expression recognition using facial landmarks and neural networks. 2022 International Conference on Machine Vision and Image Processing (MVIP). IEEE, 2022.
15. Hamill, Patrick, et al. An AERONET-based aerosol classification using the Mahalanobis distance. *Atmospheric Environment* 140, 2016: 213-233.
16. Happy, S. L., and Aurobinda Routray. Automatic facial expression recognition using features of salient facial patches. *IEEE transactions on Affective Computing* 6.1, 2014: 1–12.
17. Johnston, Benjamin, and Philip de Chazal. A review of image-based automatic facial landmark identification techniques. *EURASIP Journal on Image and Video Processing* 2018.1, 2018: 1–23.
18. Juhong, Aniwat, and Chuchart Pintavirooj. Face recognition based on facial landmark detection. 2017 10th Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON). IEEE, 2017.
19. Khabarlak, Kostiantyn, and Larysa Koriashkina. Fast facial landmark detection and applications: A survey. arXiv preprint arXiv:2101.10808, 2021.
20. Li, Dahua, et al. Facial expression recognition based on electroencephalogram and facial landmark localization. *Technology and Health Care* 27.4, 2019: 373–387.
21. Mardia, Kanti V. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, 1970, 57.3: 519–530.
22. Mardia, Kanti V. Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 1974, 115-128.
23. Meshkani, Seyed Ahmad, et al. The application of geochemical pattern recognition to regional prospecting: A case study of the Sanandaj–Sirjan metallogenic zone, Iran. *Journal of geochemical exploration* 108.3, 2011: 183–195.
24. Nader, Patric, Paul Honeine, and Pierre Beuseroy. Mahalanobis-based one-class classification. 2014 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). IEEE, 2014.
25. Nestor, Adrian, Jean M. Vettel, and Michael J. Tarr. Internal representations for face detection: An application of noise-based image classification to BOLD responses. *Human brain mapping* 34.11, 2013: 3101–3115.

26. Osman Ali, Amal Seralkhatem, et al. Age-invariant face recognition using triangle geometric features. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence* 29.05, 2015: 1556006.
27. S. Prykhodko, N. Prykhodko, L. Makarova and A. Pukhalevych, Application of the squared mahalanobis distance for detecting outliers in multivariate non-Gaussian data, 2018 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Lviv-Slavske, Ukraine, 2018, pp. 962–965, doi: 10.1109/TCSET.2018.8336353.
28. Prykhodko, Sergiy, et al. Application of transformed prediction ellipsoids for outlier detection in multivariate non-Gaussian data. 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). IEEE, 2020.
29. Saib, Yaaseen Muhammad, and Sameerchand Pudaruth. Is Face Recognition with Masks Possible?. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications* 12.7, 2021.
30. Sen, Sumen, Norou Diawara, and Khan M. Iftekharruddin. Statistical pattern recognition using Gaussian copula. *Journal of Statistical Theory and Practice* 9, 2015: 768–777.
31. Van Aelst, Stefan, and Peter Rousseeuw. Minimum volume ellipsoid. *Wiley Interdisciplinary Reviews. Computational Statistics* 1.1, 2009: 71–82.
32. Andrew R. Webb, Keith D. Copsey. *Statistical Pattern Recognition*. Third Edition. John Wiley & Sons, 2011.
33. Wu, Yue, and Qiang Ji. Facial landmark detection: A literature survey. *International Journal of Computer Vision* 127, 2019: 115–142.

REFERENCES:

1. Dovbysh, A. S., & Shelekhov, I. V. (2015). *Osnovy teorii rozpoznavannia obraziv: navch. posib.: u 2-kh ch [Basics of pattern recognition theory: teaching. manual: in the 2nd part]*. Sumy: Sumskiy derzhavnyi universytet [in Ukrainian].
2. Amato, G., Falchi, F., Gennaro, C., & Vairo, C. (2018, April). A comparison of face verification with facial landmarks and deep features. In 10th International Conference on Advances in Multimedia (MMEDIA) (pp. 1–6).
3. Beham, M. P., & Roomi, S. M. M. (2013). A review of face recognition methods. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*.
4. Bijarnia, S., & Singh, P. (2016). Age invariant face recognition using minimal geometrical facial features. In *Advanced Computing and Communication Technologies: Proceedings of the 9th ICACCT, 2015* (pp. 71–77). Springer Singapore.
5. Boyko, N., Basystiuk, O., & Shakhovska, N. (2018, August). Performance evaluation and comparison of software for face recognition, based on dlib and opencv library. In 2018 IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP) (pp. 478-482). IEEE.
6. Brereton, R. G. (2015). The chi squared and multinormal distributions. *Journal of Chemometrics*, 29(1), (pp 9–12).
7. Brereton, R. G. (2021). Multivariate classification models. *Journal of Chemometrics*, 35(12), e3332.
8. Burak. (2019). Pins Face Recognition. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/hereisburak/pins-face-recognition> (available: 08.02.2023).
9. Etherington, T. R. (2021). Mahalanobis distances for ecological niche modelling and outlier detection: implications of sample size, error, and bias for selecting and parameterising a multivariate location and scatter method. *PeerJ*, 9, e11436.
10. Fischer, C. (2016). Comparing the logarithmic transformation and the box-cox transformation for individual tree basal area increment models. *Forest Science*, 62(3), 297-306.
11. Gaber, A., Taher, M. F., Wahed, M. A., & Shalaby, N. M. (2021). SVM classification of facial functions based on facial landmarks and animation Units. *Biomedical Physics & Engineering Express*, 7(5), 055008.
12. Gallego, G., Cuevas, C., Mohedano, R., & Garcia, N. (2013). On the Mahalanobis distance classification criterion for multidimensional normal distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(17), 4387–4396.
13. Ghorbani, H. (2019). Mahalanobis distance and its application for detecting multivariate outliers. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 583–595.
14. Haghpanah, M. A., Saeedizade, E., Masouleh, M. T., & Kalhor, A. (2022, February). Real-time facial expression recognition using facial landmarks and neural networks. In 2022 International Conference on Machine Vision and Image Processing (MVIP) (pp. 1–7). IEEE.
15. Hamill, P., Giordano, M., Ward, C., Giles, D., & Holben, B. (2016). An AERONET-based aerosol classification using the Mahalanobis distance. *Atmospheric Environment*, 140, 213–233.

16. Happy, S. L., & Routray, A. (2014). Automatic facial expression recognition using features of salient facial patches. *IEEE transactions on Affective Computing*, 6(1), 1–12.
17. Johnston, B., & Chazal, P. D. (2018). A review of image-based automatic facial landmark identification techniques. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, 2018(1), 1–23.
18. Juhong, A., & Pintavirooj, C. (2017). Face recognition based on facial landmark detection. In 2017 10th Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON) (pp. 1–4). IEEE.
19. Khabarlak, K., & Koriashkina, L. (2021). Fast facial landmark detection and applications: A survey. *arXiv preprint arXiv:2101.10808*.
20. Li, D., Wang, Z., Gao, Q., Song, Y., Yu, X., & Wang, C. (2019). Facial expression recognition based on electroencephalogram and facial landmark localization. *Technology and Health Care*, 27(4), 373–387.
21. Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, 57(3), 519–530.
22. Mardia, K. V. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 115–128.
23. Meshkani, S. A., Mehrabi, B., Yaghubpur, A., & Alghalandis, Y. F. (2011). The application of geochemical pattern recognition to regional prospecting: A case study of the Sanandaj–Sirjan metallogenic zone, Iran. *Journal of geochemical exploration*, 183–195.
24. Nader, P., Honeine, P., & Beausery, P. (2014, September). Mahalanobis-based one-class classification. In 2014 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP) (pp. 1–6). IEEE.
25. Nestor, A., Vettel, J. M., & Tarr, M. J. (2013). Internal representations for face detection: An application of noise-based image classification to BOLD responses. *Human brain mapping*, 34(11), 3101–3115.
26. Osman Ali, A. S., Asirvadam, V. S., Malik, A. S., Eltoukhy, M. M., & Aziz, A. (2015). Age-invariant face recognition using triangle geometric features. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 29(05), 1556006.
27. Prykhodko, S., Prykhodko, N., Makarova, L., & Pukhalevych, A. (2018, February). Application of the squared Mahalanobis distance for detecting outliers in multivariate non-Gaussian data. In 2018 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET) (pp. 962–965). IEEE.
28. Prykhodko, S., Makarova, L., Prykhodko, K., & Pukhalevych, A. (2020, February). Application of transformed prediction ellipsoids for outlier detection in multivariate non-Gaussian data. In 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET) (pp. 359–362). IEEE.
29. Saib, Y. M., & Pudaruth, S. (2021). Is Face Recognition with Masks Possible?. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 12(7).
30. Sen, S., Diawara, N., & Iftekharruddin, K. M. (2015). Statistical pattern recognition using Gaussian copula. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 9, 768–777.
31. Van Aelst, S., & Rousseeuw, P. (2009). Minimum volume ellipsoid. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 1(1), 71–82.
32. Andrew R. Webb., & Keith D. Copesey. (2011). *Statistical Pattern Recognition*. Third Edition. John Wiley & Sons.
33. Wu, Y., & Ji, Q. (2019). Facial landmark detection: A literature survey. *International Journal of Computer Vision*, 127, 115–142.