УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-7

Олексій СЕРГЄЄВ
аспірант кафедри системного аналізу та управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, serhieiev.o.s@nmu.one
ORCID: *0000-0001-5781-5540*
Scopus-Author ID: *57220190743*

Світлана УС
кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу та управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, us.s.a@nmu.one
ORCID: *0000-0003-0311-9958*
Scopus-Author ID: *55603096000*

Бібліографічний опис статті: Сергєєв, О., Ус, С. (2023). Аналіз сучасних підходів до розв'язання дискретних та неперервних багатоетапних задач розміщення. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 59–70, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-7

АНАЛІЗ СУЧАСНИХ ПІДХОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИСКРЕТНИХ ТА НЕПЕРЕРВНИХ БАГАТОЕТАПНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ[1]

Стрімкий розвиток логістичних процесів між регіонами і державами є основною з причин ускладнення і подовження ланцюгів матеріальних потоків. Робота спрямована на дослідження моделей розміщення підприємств та їх застосування на практиці. Метою роботи є огляд актуальних проблем і підходів до розв'язання задач розміщення підприємств з подальшим аналізом методів їх розв'язання та визначення перспективних напрямків подальшого розвитку. Окреслено різні аспекти моделювання багатоетапних задач розміщення, включаючи вплив географічного положення, інфраструктури, доступності робочої сили, попиту та інших факторів на ефективність виробництва. Досліджено методи моделювання, включаючи лінійне та нелінійне програмування, генетичні алгоритми, аналіз ієрархій та нечітку логіку. Розглянуто вплив невизначеності та ризиків на процес прийняття рішень про розміщення підприємств. Особливу увагу приділено аналізу впливу розміщення підприємств на довкілля та сталий розвиток.

В роботі розглянуто загальні математичні постановки практичних задач, що можуть бути зведені до багатоетапних задач розміщення, запропоновано класифікацію методів та підходів до розв'язання задач цього типу. Проведено огляд актуальних наукових робіт для точних, евристичних, метаевристичних, багатокритеріальних, стохастичних, інтегрованих та континуальних методів до розв'язання багатоетапної задачі розміщення та окреслено сильні та слабкі сторони кожного з підходів. Окремо зазначено проблему розмірності, що виникає при розв'язанні задач дискретної постановки, коли кількість об'єктів, що розміщуються, є великою. Проаналізовано обмеження, що виникають у різних задачах з предметної області.

Авторами зазначено, що наявні методи до розв'язання є ефективними, однак, з метою урахування можливого масштабування проблеми, перспективним є дослідження поєднання неперервних методів з іншими підходами до розв'язання, такими як метаевристика або стохастика, для подальшого покращення їхньої продуктивності при застосуванні в практичних сценаріях.

Ключові слова: *багатоетапна задача розміщення, генетичні алгоритми, неперервні задачі розміщення, оптимальне розбиття множин.*

[1] Робота є складовою частиною досліджень за держбюджетною науковою темою 0123U100011 «Задачі аналізу, моделювання та оптимізації технологічних процесів у складних системах різної природи», що виконуються в НТУ «Дніпровська політехніка».

Oleksii SERHIEIEV
Postgraduate Student at the Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, Dmytro Yavornytskyi ave., 19, Dnipro, Ukraine, 49005, serhieiev.o.s@nmu.one
ORCID: *0000-0001-5781-5540*
Scopus-Author ID: *57220190743*

Svitlana US
Candidate of Physics and Mathematics Science, Associate Professor, Professor at the Department of System Analysis and Control, University of Technology, Dmytro Yavornytskyi ave., 19, Dnipro, Ukraine, 49005, us.s.a@nmu.one
ORCID: *0000-0003-0311-9958*
Scopus-Author ID: *55603096000*

To cite this article: Serhieiev, O., Us, S. (2023). Analiz suchasnykh pidkhodiv do rozviazannia dyskretnykh ta neperervnykh bahatoetapnykh zadach rozmishchennia [Analysis of modern approaches to solving discrete and continuous multi-stage allocation problems]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 2, 59–70, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-7

ANALYSIS OF MODERN APPROACHES TO SOLVING DISCRETE AND CONTINUOUS MULTI-STAGE ALLOCATION PROBLEMS

The rapid development of logistics processes between regions and countries is the main reason for the complexity and elongation of material flow chains. The paper aims to consider various enterprise location models and their application in practice. The purpose of the paper is to review current problems and approaches to solving the issues of enterprise location, followed by an analysis of specific methods and identification of promising areas for further development. Various aspects of the multi-stage location problem are outlined, including the impact of geographic location, infrastructure, labor availability, demand and other factors on production efficiency. Various modeling techniques are investigated, including linear and nonlinear programming, genetic algorithms, hierarchy analysis and fuzzy logic. The publication discusses the impact of uncertainty and risks on the decision-making process of enterprise location. Particular attention is paid to analyzing the relationship between the location of enterprises and the reduction of negative environmental impact and sustainable development.

The paper considers general mathematical formulations of practical problems that can be reduced to multi-stage location problems and proposes a classification of methods and approaches to solving problems of this type. Relevant scientific works for exact, heuristic, metaheuristic, multi-criteria, stochastic, integrated and continuum methods for solving a multi-stage location problem is reviewed. The pros and cons of each approach are mentioned. The authors also emphasize the problem of dimensionality that arises when solving problems in discrete statement when the number of objects to be placed is large. The limitations arising in various problems from the subject area were analyzed.

The authors note that the existing solution approaches are effective. However, to consider the possible scaling of the problem, it is promising to study the combination of continuous methods with other solution approaches, such as metaheuristics or stochastic methods, further to improve their performance and practical scenarios applicability.

Key words: *multi-stage allocation problem, genetic algorithms, continuous allocation problems, optimal partitioning of sets.*

Вступ. Логістичний підхід вимагає об'єднання всіх складових частин процесу у єдину систему, щоб забезпечити ефективне управління матеріальними потоками. В сучасному економічному контексті транспортно-виробничі системи, що забезпечують процеси кругообігу матеріальних ресурсів, можуть бути досить складними та об'ємними. Ці системи включають багато економічних агентів та посередників, розташованих в різних регіонах та територіях. Крім того, вони характеризуються відмінностями у розмірах потреб різних клієнтів та іншими факторами. Іншими словами, логістичний підхід до управління матеріальними потоками спрямований на оптимізацію руху товарів та матеріалів від їх джерел до кінцевих пунктів призначення в найбільш ефективний та результативний спосіб. Цей підхід передбачає інтегроване бачення всього логістичного процесу, включаючи всі дії та учасників, що беруть участь в переміщенні, зберіганні та розподілі матеріалів.

На практиці менеджери логістики повинні координувати та інтегрувати різні елементи логістичного процесу, такі як транспортування, управління запасами, складське господарство та обробка замовлень, серед інших. Також вони повинні враховувати різні компроміси, такі як баланс між витратами на транспортування та рівнями запасів та компроміси між швидкістю та вартістю транспортування.

Логістика матеріальних потоків здійснюється не тільки в рамках одного самостійного підприємства, але й за його межами, в інших, подібних до нього або пов'язаних з ним структурах, а це визначає таку властивість транспортно-виробничих процесів, як їх багатоетапність.

Прикладами задач розміщення підприємств є велика кількість практичних задач, що виникають у сьогоденні. Наведемо деякі з них.

Задача покращення просторового планування громадських служб охорони здоров'я через розробку моделей локації-алокації та доступності. Зокрема, розглядається визначення оптимального розміщення лікарень та інших медичних закладів з урахуванням таких факторів як попит населення, доступність та відстань до інших закладів охорони здоров'я. Дослідження (Polo, Acosta, Ferreira, & Dias, 2015) було проведено на прикладі організації медичного обслуговування в Лісабоні (Португалія), де застосування запропонованих методів дозволило покращити якість охорони здоров'я та ефективність витрат на її надання.

Оптимальне розміщення складів (You & Xiao, 2019). Запропоновано нову модель змішаного цілочисельного лінійного програмування для розв'язання проблеми розміщення складів з використанням лінеаризацій евклідової відстані.

Розміщення об'єктів утилізації відходів. У роботі (Yadav & Bhurjee, 2017) пропонується нова модель розміщення об'єктів для систем управління твердими побутовими відходами з урахуванням невизначеності вихідних даних. Автори використовують множинне лінійне програмування та метод мінімаксного критерію. Розв'язано задачі мінімізації затрат та максимізації покриття потреб в обслуговуванні населення.

Розміщення заводів та виробництв. Публікація (Paul, Chowdhury, & Ahsan, 2021) пропонує новий підхід до розміщення виробничих підприємств з використанням нечіткої логіки та систем виведення висновків. Дослідження є корисним для менеджерів з прийняття рішень в галузі виробництва, оскільки воно дозволяє ефективно використовувати нечітку логіку та системи виведення висновків для розв'язання складних проблем розміщення виробничих підприємств. Запропонована модель може бути застосована у різних галузях, включаючи автомобільну, електронну та харчову промисловість, де виробництво пов'язане з багатьма факторами, які впливають на ефективність виробництва.

Постановка завдання в предметній області. Проблема розміщення об'єктів є поширеною проблемою в дослідженні операцій та логістиці, яка полягає у визначенні оптимального розміщення об'єктів (таких як склади, фабрики, розподільчі центри та ін.) для обслуговування заданої множини точок попиту. Метою є мінімізація витрат при одночасному задоволенні попиту споживачів та вимог до рівня обслуговування.

Одним з головних викликів проблеми розміщення об'єктів є велика кількість задіяних змінних, включаючи кількість об'єктів, що підлягають розміщенню, розмір об'єктів, транспортні витрати, а також обсяги попиту. Ще однією проблемою є необхідність балансування суперечливих цілей, таких як мінімізація транспортних витрат при одночасному забезпеченні швидких термінів доставки. Невизначеність обсягів попиту, мінливість транспортних витрат у зв'язку з дорожнім рухом або погодними умовами, та неочікувані перебої у ланцюгу поставок можуть створювати перешкоди у логістичному процесі. Крім того, рішення про розміщення об'єктів можуть мати значні екологічні та соціальні наслідки, які також необхідно враховувати. Наприклад, розміщення об'єкта в густонаселеному районі може мати негативний вплив на місцевих жителів, тоді як розміщення об'єкта у віддаленому районі може мати негативний вплив на навколишнє середовище.

Для розв'язання задач розміщення в літературі запропоновано різні математичні методи оптимізації: лінійне і нелінійне програмування, цілочисельне програмування, направлені пошуки, та інші. Зараз актуальним є застосування штучного інтелекту і машинного навчання, з використанням алгоритмів кластеризації і моделей глибокого навчання, для розв'язання проблем розміщення об'єктів.

Математична модель. При огляді багатоетапних задач розміщення, існує велика кількість різних практичних завдань, що можуть буть зведені до задач такого типу. Наведемо загальну математичну постановку, що ілюструє проблему.

Припустимо, маємо такі множини: I – множина потенційних підприємств; J – множина етапів чи рівнів в логістичному процесі; K – множина споживачів.

Також відомо: f_i – фіксована вартість за розміщення підприємства $i \in I$; c_{ij} – вартість транспортування одиниці продукту з підприємства $i \in I$ на етапі $(j-1) \in J$ до підприємства $i \in I$ на етапі $j \in J$; h_{ij} – витрати на утримання одиниці продукції за період на підприємстві $i \in I$ на етапі $j \in J$;

d_{ik} – попит споживача $k\in K$ на етапі $j\in J$; q_i – потужність підприємства i; x_{ij} – булева змінна, яка дорівнює 1, якщо підприємство $i\in I$ розташоване на етапі $j\in J$; y_{ijk} – кількість продукту, що відвантажено з підприємства $i\in I$ на етапі $(j-1)\in J$ до споживача $k\in K$ на етапі $j\in J$; z_{ij} –потужність підприємства $i\in I$ на етапі $j\in J$.

Цільова функція: метою є зменшення загальних витрат мережі ланцюгів поставок, які є сумою витрат на основні засоби, транспортні витрати та витрати на утримання. Це можна виразити так: мінімізувати

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f_i x_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J\setminus\{1\}}\sum_{i'\in I} c_{ij} x_{ij} x'_{i,j+1} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} h_{ij} z_{ij}, \quad (1)$$

за таких обмежень:

1. Загальна пропозиція на кожному об’єкті не може перевищувати потужність об’єкта:

$$\sum_{j\in J} z_{ij} \le q_i x_{ij} \forall i \in I,\ j \in J. \quad (2)$$

2. Загальний попит на кожному етапі від клієнта має бути задоволений:

$$\sum_{i\in I} y_{ijk} = d_{jk} \forall j \in J,\ k \in K. \quad (3)$$

3. Кількість продукції, що перевозиться між підприємствами, має задовольняти рівняння балансу потоків:

$$\sum_{i\in I} y_{i,j-1,k} - \sum_{i\in I} y_{i,j,k} = 0,\ \forall j \in J\setminus\{1\},\ k \in K. \quad (4)$$

4. Кількість товару, що зберігається на складі, має задовольняти рівняння балансу запасів:

$$z_{ij} - z_{i,j-1} + \sum_{i'\in I} y_{i',j-1,k} - \sum_{i'\in I} y_{i',j,k} = 0,$$
$$\forall i \in I,\ j \in J\setminus\{1\},\ k \in K. \quad (5)$$

Додатково, залежно від постановки задачі в предметній області, можуть виникати обмеження, які залежать від конкретної проблеми та її контексту.

Найбільш часто у задачах розміщення об’єктів використовуються перелічені нижче типи обмежень.

– Стосовно пропускної здатності: об’єкти мають обмежену пропускну здатність для обслуговування клієнтів, і ці обмеження необхідно враховувати, щоб гарантувати, що об’єкти зможуть задовольнити попит з боку клієнтів.

– Щодо відстані: підприємства мають бути розташовані на певній відстані від клієнтів, яких вони обслуговують, щоб мінімізувати транспортні витрати та забезпечити своєчасне надання послуг.

– Щодо рівня обслуговування: підприємства повинні забезпечувати певний рівень обслуговування клієнтів, наприклад, мінімальний рівень якості, оперативності та надійності.

– На підприємства можуть поширюватися різні обмеження щодо розміщення, наприклад, правила зонування, екологічні норми або інші юридичні чи логістичні обмеження.

– Витрати: об’єкти мають бути розташовані таким чином, щоб мінімізувати загальні витрати на обслуговування клієнтів, беручи до уваги такі фактори, як транспортні витрати, витрати на експлуатацію об’єкта та інші відповідні витрати.

– Обмеження щодо підключення до мережі: підприємства можуть потребувати підключення до більшої мережі або транспортної інфраструктури для забезпечення ефективного надання послуг.

– Попит на послуги може піддаватися різним обмеженням, таким як сезонність, мінливість або інші фактори, що обмежують обсяг попиту, який можна задовольнити в будь-який момент часу.

– Обмеження щодо спільного використання потужностей: для оптимізації надання послуг та мінімізації витрат може виникнути потреба у спільному використанні потужностей або ресурсів декількох підприємств.

Комбінації цих обмежень використовуються для опису проблем розміщення об’єктів та побудови відповідних математичних постановок для задач, розв’язання яких потребує комплексних методів оптимізації.

Класифікація методів розв’язання. З розглянутих вище практичних прикладів, загальної моделі (1)–(5) та можливих застосувань задач випливає, що підходи до розв’язування цих задач відрізняються залежно від предметної області чи обмежень, викликаних кількістю змінних. В сучасних дослідженнях використовуються такі ***методи*** для розв’язання двоетапних задач розміщення:

– *Точні,* що передбачають розв’язання проблеми розміщення об’єкта шляхом пошуку оптимального рішення за допомогою математичних методів оптимізації, таких як лінійне та нелінійне програмування, цілочисельне програмування та змішане цілочисельне програмування. Вони можуть бути обчислювально інтенсивними, але при цьому забезпечують гарантоване оптимальне рішення.

– *Метаевристичні* методи з використанням алгоритмів високого рівня для управління пошуком наближеного до оптимального розв'язку. Вони включають генетичні алгоритми, імітаційне відпалювання, табу-пошук та оптимізацію мурашиних колоній та можуть бути обчислювально інтенсивними. Однак при цьому дозволяють швидко знаходити ефективні розв'язки.

– *Евристичні*, що передбачають використання алгоритмів апроксимації або евристик для пошуку наближених до оптимальних рішень проблеми розміщення об'єкта. Ці підходи часто швидші за точні методи, але можуть не гарантувати оптимального рішення.

– *Методи багатоцільової оптимізації*, які передбачають оптимізацію проблеми розміщення об'єкта з декількома конфліктуючими цілями, такими як мінімізація транспортних витрат і максимізація задоволення потреб клієнтів. Вони можуть допомогти збалансувати конфліктуючі цілі та знайти рішення, які є оптимальними з точки зору кількох цілей.

– *Стохастичні методи*, що передбачають моделювання невизначеності в проблемі розміщення об'єктів, таких як мінливість попиту, транспортні витрати та перебої в ланцюгу поставок та можуть допомогти розробити надійні логістичні плани, що можуть адаптуватися до несподіваних змін у навколишньому середовищі.

– *Інтегровані*, в яких застосовується інтеграція проблем розміщення об'єктів з іншими проблемами оптимізації ланцюга поставок, такими як управління запасами, планування виробництва і маршрутизація перевезень. Вони допомагають оптимізувати весь ланцюг поставок і знайти рішення, оптимальні з точки зору багатьох вимірів.

Розглянемо наявні дослідження, результати яких можна віднести до однієї в вищезазначених категорій.

Точні методи. Задача розміщення потужностей з єдиним джерелом постачання (Holmberg, Rönnqvist, & Yuan, 1999), для розв'язання якої запропоновано точний алгоритм, коли кожен клієнт обслуговується одним об'єктом. Для методів цього типу характерним є розгляд більш спрощеної математичної моделі ніж наведена раніше загальна математична постановка, наприклад:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i, \tag{6}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j x_{ij} \le b_i y_i, \forall i, \tag{7}$$

$$x_{ij} - y_i \le 0, \forall i, j, x_{ij}, y_i \in \{1,0\}, \forall i, j, \tag{8}$$

де m – кількість потенційних підприємств, n – кількість клієнтів, a_j – попит клієнта j, b_j – ємність підприємства j, f_j – фіксована вартість відкриття підприємства i, c_{ij} – вартість обслуговування i-м підприємством j-го користувача. Тобто розглядається одноетапна задача розміщення та вартість розміщення того чи іншого підприємства враховується у цільовій функції. Також застосовуються обмеження (2) та (4) із загальної математичної постановки.

Алгоритм ґрунтується на підході з розгалуженням і обмеженнями з підзадачею релаксації Лагранжа. Автори демонструють ефективність свого алгоритму, порівнюючи його з іншими точними та евристичними методами на наборі тестових прикладів. Результати показують, що запропонований алгоритм здатний оптимально розв'язувати задачі розмірності до 30×200.

Проблема розміщення виробничих потужностей (Christensen & Klose, 2021) з диференційованими опуклими виробничими витратами, яка є варіантом класичної задачі розміщення потужностей, де вартість виробництва на кожному підприємстві моделюється як опукла функція від його виробничої потужності. Автори пропонують швидкий точний метод, заснований на підході гілок і цін, який використовує структуру задачі та опуклість виробничих витрат. Стверджується, що алгоритм є ефективним при розв'язуванні задач, вхідні дані яких мають не більше ніж 1000 клієнтів та 100 об'єктів. Запропонований метод порівнюється з іншими точними та евристичними підходами, показуючи, що він перевершує інші точні методи і дає розв'язки, які знаходяться в межах декількох відсотків від найкращих відомих рішень.

Метаевристичні методи. У роботі (Mitsuo, Fulya, & Lin, 2006) розглядається двоетапна транспортна задача у якій за мету взято мінімізацію логістичних витрат, враховуючи вартість розміщення центрів дистрибуції та витрат на транспортування між підприємствами, центрами дистрибуції та клієнтами. Пропонується розглянути таку математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} t_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} c_{jk} y_{jk} + \sum_{j=1}^{J} g_j z_j, \tag{9}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \le a_i, \sum_{k=1}^{K} y_{jk} \le b_j z_j, \forall i, j, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{J} z_j \le W, \forall j, k, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{J} y_{jk} \ge d_k, \forall j, k, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}x_{ij}=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}y_{jk},\forall i,j,k, \qquad (13)$$

$$x_{ij},y_{jk}\geq 0,z_j=\{0,1\},\forall i,j,k. \qquad (14)$$

Тут I – кількість заводів ($i=\overline{1,I}$); J – кількість центрів дистрибуції ($j=\overline{1,J}$); K – кількість споживачів ($k=\overline{1,K}$); a_i – потужність заводу i, b_i – потужність центру дистрибуції; d_k – попит k-го споживача; t_{ij} – одиниця вартості перевезення з заводу i до центра дистрибуції j; c_{jk} – одиниця вартості перевезення з центра дистрибуції j до споживача k; g_j – фіксована вартість відкриття j-го центра дистрибуції; w – верхня межа загальної кількості відчинених центрів дистрибуції; x_{ij} – кількість перевезеного ресурсу з заводу i до центру дистрибуції j; y_{jk} – кількість перевезеного ресурсу з центру дистрибуції j до споживача k; z_j: 0–1 – булева змінна, що відповідає 1, коли центр дистрибуції j відчинений.

Тут розглянуто стандартну дискретну модель з додатковими обмеженнями на максимальну кількість розміщення центрів дистрибуції. Автори пропонують застосовувати генетичний алгоритм для розв'язання задачі. План перевезень закодовано з використанням пріоритетів. Запропоновано вживання зваженого кросоверу, який гарантує коректність отриманої хромосоми та дозволяє не проводити процедуру її відновлення. Використано алгоритм мутації вставками або обміном. В роботі автори розв'язують декілька модельних задач та порівнюють отримані розв'язки з відомими результатами розв'язання задач невеликої розмірності із застосуванням повного перебору.

У роботі (Raj & Rajendran, 2012) досліджуються два різні випадки двоетапної транспортної задачі:

1) задачі з фіксованою платою за використання маршруту та платою за перевезення одиниці товару платою;

2) задачі з фіксованою платою за перевезення одиниці товару та врахуванням вартості відчинених центрів дистрибуції.

Для обох випадків, авторами запропоновано використання генетичного алгоритму з кодуванням плану перевезень у вигляді матриці. Алгоритми для розв'язування обох типів задач наведені у роботі та проведені числові експерименти. Цікавою особливістю запропонованого генетичного підходу є генерація першої популяції, що робиться з врахуванням різних алгоритмів побудови вихідних планів.

Інший підхід до розв'язання двоетапної транспортної задачі з фіксованою платою за використання маршруту запропоновано у (Cosma, Pop, & Sabo, An efficient solution approach for solving the two-stage supply chain problem with fixed costs associated to the routes, 2019). Розглянута модель є дискретною та відповідає стандартній постановці двоетапної задачі з фіксованою платою. Запропонований алгоритм є ітераційним процесом, в якому розглядаються декілька варіантів розподілу розв'язків, з яких обираються найкращі. Після кожного отриманого розв'язку проводиться направлений пошук кращих варіантів, за допомогою додаткових обмежень на відповідні ланцюги постачання. Розв'язок, отриманий в результаті роботи алгоритму, зберігається у випадку, коли він є кращим за всі попередні варіанти. Додатковим інструментом, що зменшує ймовірність потрапляння у локальний мінімум є процедура перемішування клієнтів при побудові нових розв'язків. У програмній реалізації застосована процедура хешу для ефективного видалення дублікатів. Автори наводять результати декількох експериментів, які свідчать про те, що запропонований алгоритм працює не гірше для будь-яких вхідних даних, та працює краще для даних невеликих розмірностей.

Багатоступенева реверсивна логістична мережа розглянута у (Lee, Gen, & Rhee, 2009). Автори формулюють математичну модель переробної системи перепрофільного відпрацювання як триетапну модель мережі логістики для мінімізації загальної вартості відправлення зворотної логістики та фіксованої вартості відкриття центрів демонтажу та обробки. Також в роботі враховується багатоетапність, багатопродуктовість та деякі умови для центрів демонтажу та обробки відповідно. Для розв'язання цієї проблеми застосовують генетичний алгоритм з пріоритетним кодуванням для першого та другого етапу з використанням методу зваженого кросоверу. В роботі наведені обчислювальні експерименти з доведенням ефективності запропонованого алгоритму.

Публікація (Khan, Pal, & Maiti, 2018) описує розв'язання задачі комівояжера за допомогою ройових методів. Застосовуються поєднання методу рою частинок та поєднується з генетичним алгоритмом, використовуючи вихідні дані одного для вхідних даних іншого з алгоритмів. Цікавим в роботі є дослідження ефективності застосування методу рулетки та багатоточкового циклічного кросоверу. При тестуванні з використанням вибірок великих розмірів, алгоритм демонструє 100 % успіх для чіткого випадку.

Двоетапна транспортна задача з обмеженням на кількість відчинених центрів дистрибуції наведена у (Cosma, Pop, & Danciulescu, A Parallel Algorithm for Solving a Two-Stage Fixed-Charge Transportation Problem, 2022). Пропонується застосування генетичного алгоритму для пошуку ефективного розв'язку. Автори роботи застосовують модифікований генетичний алгоритм з можливостю паралелізації процесу оцінки хромосом. Основна ідея цього алгоритму складається з двох кроків: обирання перспективних центрів дистрибуції та розв'язання декількох підзадач, в яких беруть участь тільки обрані центри дистрибуції. В роботі пропонується розділяти центри дистрибуції на «хороші» та «погані» з метою їх подальшого включення у відповідні «хороші» та «погані» плани перевезень. Саме процедура оцінки та класифікації в алгоритмі розроблена із застосування пулу потоків, що прискорює отримання результатів. В публікації наведений псевдокод реалізацій відповідних процедур та аналіз впливу параметрів алгоритму (якість та швидкість) на кількість необхідних ітерацій для отримання найкращого розв'язку.

В (Salman, 2018) пропонується розв'язати двоетапну транспортну задачу з використанням табу-пошуку та процедури кодування. Математична модель відповідає дискретній постановці двоетапної транспортної задачі з обмеженням на кількість підприємств. Автор роботи наголошує на ідеї використання списку заборонених розв'язків, щоб врахувати можливі потрапляння в локальні мінімуми, з метою отримання кращого розв'язку. У роботі пропонується розглядати закодовані плани перевезень, що модифікуються на кожній ітерації і, якщо вони містять кращий розв'язок, то заносяться у лист заборонених розв'язків. У результаті, в роботі стверджується, що результати, отримані за допомогою табу-пошуку є кращими ніж ті, що отримані із застосуванням генетичного алгоритму.

Евристичні методи є схожими на модель (9) – (14), що була розглянута для метаевристичних підходів.

У статті (Buson, Roberti, & Toth, 2014) розглядається модель двоетапної транспортної задачі з фіксованою платою за використання маршруту. Автори пропонують ітерований евристичний алгоритм локального пошуку, що спирається на мінімізацію затрат на кожній ітерації з подальшою фазою перезапуску. Мінімізація витрат досягається за допомогою застосування процедури нижнього обмеження при розв'язанні проблеми з трьома індексами при обмеженнях з дійсними нерівностями. Запропонований метод був протестований на двох еталонних прикладах з літератури.

Планування лікарняних мереж в умовах невизначеності (Mestre, Oliveira, & Barbosa-Póvoa, 2014) за допомогою набору дискретних сценаріїв, які охоплюють майбутні можливі імплементації системи. Було розроблено дві математичні моделі, які відображають різні припущення щодо рішень, які необхідно приймати за відсутності повної інформації про невизначені параметри. Незважаючи на те, що моделі представляють різні підходи до розв'язання проблеми невизначеності, вони мають однакову комплексну структуру, розглядаючи питання, які можуть виникнути в реальних умовах використання лікарень, що працюють в ієрархічній мережі і надають різні послуги. Розглядаються компроміси між покращеним доступом та мінімальними витратами, які розв'язуються за допомогою методу багатоцільового програмування з обмеженнями, що надає особі, яка ухвалює рішення, альтернативні варіанти для планування. Моделі були розроблені в контексті системи охорони здоров'я, що базується на структурі Національної служби охорони здоров'я (НСОЗ), а для перевірки їхньої застосовності було використано тематичне дослідження на прикладі португальської НСОЗ.

Задача обґрунтованого планування та оптимізації розміщення укриттів (He & Xie, 2022) з метою зменшення втрат від стихійних лих та покращення сталого розвитку міст. Розглядається послідовний розв'язок двокритеріальної задачі: що базується на логіці послідовних рішень для максимізації економічної стійкості та соціальної корисності.

Стохастичні методи. Розглянемо наступну математичну модель.

Нехай задані:

I – множина потенційних підприємств; J – множина клієнтів; K – множина можливих сценаріїв; f_i – фіксована вартість за розміщення підприємства $i \in I$; c_{ij} – вартість транспортування одиниці продукту з підприємства $i \in I$ до клієнта $j \in J$; p_{ik} – ймовірність сценарію K; d_{jk} – попит клієнта j в сценарії k; $x_{ij} \in [0,1]$ – неперервна змінна, що вказує на частку попиту клієнта j, що обслуговується підприємством i; $y_{ik} \in \{0,1\}$ – булева зміна, що відповідає чи відчинено підприємство i у сценарії k; $w_{ijk} \in [0,1]$ – неперервна змінна, що показує частку попиту клієнта j у сценарії k, що обслуговується з об'єкта i.

Мінімізувати

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} f_i y_{ik} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} w_{ijk} p_{jk}, \tag{15}$$

за таких обмежень

– на потужність:

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} d_{jk} w_{ijk} \le \sum_{j\in J} x_{ij}\ \forall i \in I, \qquad (16)$$

– на задоволення попиту для кожного споживача *j* та сценарію *k:*

$$\sum_{i\in I} w_{ijk} \le 1, \forall j \in J, k \in K, \qquad (17)$$

– на розподіл ресурсів:

$$w_{ijk} \le x_{ij} y_{ik}, \forall i \in I, j \in J, k \in K, \qquad (18)$$

– природні:

$$x_{ij}, w_{ijk} \ge 0, y_{jk} \in \{0,1\}\ \forall i \in I, j \in J, k \in K. \qquad (19)$$

Робота (Bieniek, 2015) зосереджується на проблемі розміщення об'єктів зі стохастичним попитом, коли попит клієнтів є невизначеним і моделюється як випадкова величина. Автор пропонує двоетапний стохастичний підхід для розв'язання проблеми та використовує генерацію скінченної кількості сценаріїв і розв'язує задачу для кожного з них, застосовуючи змішане лінійне програмування. Результати роботи демонструють ефективність запропонованого методу на низці числових прикладів, показуючи, що він гарантує розв'язки, стійкі до невизначеності у попиті, і перевершує деякі евристичні підходи.

Інтеграція стохастичної моделі інвентаризації з моделлю мережі ланцюга поставок розглянута у (You & Grossmann, 2008). Цю задачу можна сформулювати як широкомасштабну комбінаторну оптимізаційну модель, яка включає нелінійні умови. У роботі проаналізовано властивості базової моделі та пропонуються методи розв'язання для спільного проектування мережі ланцюга постачання та моделі управління запасами для даного продукту. Модель сформульована як задача нелінійного цілочисельного програмування. Переформулювавши її як задачу змішаного цілочисельного нелінійного програмування і, використовуючи пов'язану модель опуклої релаксації для ініціалізації, автори пропонують евристичний метод для швидкого отримання якісних рішень. Крім того, розроблено алгоритм декомпозиції на основі релаксації Лагранжа для отримання глобальних або майже глобальних оптимальних рішень.

Інтегровані методи. Застосовуються до математичних моделей вигляду (1) – (5), однак підходи до розв'язання є комбінацією різних з розглянутих вище типів.

Вже відома двоетапна транспортна задача з фіксованою платою за використання маршруту в публікації (Calvetea, Galé, & Toth, 2018). Для розв'язання цієї задачі, автори застосовують перехід до іншої форми задачі, що схожа на двоетапну транспортну задачу з врахуванням вартості перевезення одиниці товару. Вартість товару предаставлена у вигляді умовного виразу залежно від того використовується цей маршрут чи ні. В якості алгоритму для розв'язання застосовують генетичний алгоритм. Хромосому кодують з використанням матричного представлення. В роботі доведено робастність запропонованого алгоритму з використанням випадково згенерованих сутностей. Для кожної з цих сутностей, розв'язок був знайдений за раціональний час.

В публікації (Arabzad, Ghorbani, & Zolfani, 2015) досліджується проблема location-allocation з метою розроблення ланцюга поставок. Розглянуто ланцюг постачання з декількома постачальниками, продуктами, заводами та клієнтами. Для ефективного розв'язання проблеми невизначеності параметрів попиту і витрат застосовано сценарний підхід. Формулювання являє собою стійке багатоцільове частково-цілочисельне лінійне програмування контексті якого одночасно враховуються дві суперечливі цілі: (1) мінімізація загальних витрат ланцюга поставок, включаючи витрати на сировину, транспортні витрати та витрати на створення заводів, і (2) мінімізація загального рівня погіршення якості, спричиненого альтернативними варіантами перевезень. Застосовано метод зваженої суми та розв'язано одноцільову задачу частково-цілочисельного програмування.

Прикладами комбінування декількох підходів можуть бути роботи (Khan, Pal, & Maiti, 2018), (Buson, Roberti, & Toth, 2014), (Mestre, Oliveira, & Barbosa-Póvoa, 2014), опис яких наведено вище.

Розглянувши підходи до розв'язання задач розміщення, можна зробити висновок, що увагу дослідників більш захоплює використання метаевристичного підходу. Використовуючи цей підхід, авторам вдається досягти ефективних рішень за оптимальний час. Однак у дискретному випадку знайти ефективний розв'язок за адекватний час вдається лише для задач невеликих та середніх розмірностей. При застосуванні точних методів, розмірності задач обмежуються ще більше (розглядають невеликі задачі). Враховуючи це, слід звернути увагу на дослідження, де розв'язки для задач можуть бути отримані для більшої кількості об'єктів.

В монографії (Кісельова, 2018) містяться засади теорії оптимального розбиття множин, що можуть бути застосовані при розв'язанні багатоетапних задач розміщення, у випадку коли користувачі або ресурс розподілені неперервно в даній області. У роботі наведені основні методи негладкої оптимізації, а саме субградієнтні методи з розтягом простору в напрямі субградієнту та описані задачі оптимального розбиття множин, які, будучи задачами нескінченновимірної оптимізації, зводяться до декількох задач негладкої, але скінченновимірної оптимізації.

Дослідженню багатоетапних задачі розміщення присвячена робота (Us & Stanina, 2017). Розглядається клас задач, в яких існує кілька груп розміщуваних об'єктів, кожна з яких має свою множину можливих місць розміщення (в окремому випадку ці множини можуть збігатися) і регламентовано зв'язки між об'єктами, наприклад задана певна ієрархія між об'єктами розміщення. У роботі зазначається відсутність досліджень випадку континуальних багатоетапних задач і наводяться приклади з предметної області. Також наведена модель двоетапної континуальної задачі розміщення. Континуальність розглядається для кожного з етапів, іноді комбінована з дискретними випадками.

Загальні засади створення нових математичних моделей для процесів двоетапного виробництва та обґрунтування методів їх розв'язування з урахуванням неперервності розподілення ресурсів та наявності декількох етапів виробництва описано в монографії (Станіна, Ус, & Коряшкіна, 2021). Особливу увагу приділено експериментальним дослідженням та аналізу результатів модельних задач. Наведено приклади практичного застосування запропонованих моделей у задачах оптимізації двоетапного розподілу матеріального потоку в паливно-енергетичному комплексі. Наприклад, потрібно знайти такі розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)$ (серед яких можуть бути і порожні) і обсяги перевезень $v_{11},\ldots,v_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\{v_{11},\ldots,v_{NM}\}} F\left(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\{v_{11},\ldots,v_{NM}\}\right), \quad (20)$$

при обмеженнях:

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx = b_i^I, \forall i=\overline{1,N}, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = b_i^I, \forall i=\overline{1,N}, \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \forall j=\overline{1,M}, \quad (23)$$

$$(\Omega_1,\ldots,\Omega_N) \in \sum_{\Omega}^{N}, \quad (24)$$

$$\sum_{\Omega}^{N} = \{(\Omega_1,\ldots,\Omega_N): \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i = \Omega, mes\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = \varnothing, i\ne j, i,j=\overline{1,N}\}, \quad (25)$$

$$v_{ij} \ge 0, i=\overline{1,N}, j=\overline{1,j}, \quad (26)$$

де

$$F\left(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\{v_{11},\ldots,v_{NM}\}\right) = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right), \quad (27)$$

– b_i^I – потужність *i*-го підприємства I-го етапу;

– b_j^{II} – потужність *j*-го підприємства II-го етапу;

– $c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)$ – вартість доставки одиниці сировини з точки $x\in\Omega$ до *i*-го підприємства I етапу;

– $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$ – вартість доставки одиниці сировини від *i*-го підприємства *i* етапу до *j*-го підприємства II етапу;

– $\rho(x)$ – кількість ресурсі в точці $x\in\Omega$;

– $\tau_i^r = \left(\tau_{i1}^r,\tau_{i1}^r\right)$ – координати i-го підприємства *r*-го етапу;

– v_{ij} – обсяг продукції, що постачається від. *i*-го підприємства I етапу до *j*-го підприємства II етапу: $v_{ij} \ge 0, i=\overline{1,N}; j=\overline{1,M}$.

Авторами отримані розв'язки для задач більших розмірностей, ніж для тих, що зазвичай розв'язанні за допомогою метаевристичних методів

Підсумуємо розгляд різних класів задач та наведемо переваги та недоліки кожних з них у таблиці 1.

Таблиця 1

Недоліки та переваги кожного з класу методів

№	Клас методу	Переваги	Недоліки
1	2	3	4
1	Точні	• Гарантують оптимальне рішення; • використовуються для широкого спектру типів задач розміщення об'єктів	• Вимагають значних обчислень, особливо для великих задач; • мають проблеми з масштабуванням для обробки змін параметрів або прийняття рішень в реальному часі
2	Евристичні	• Швидші за точні методи; • працюють з великими проблемами та динамічними середовищами	• Не гарантують оптимального рішення; • не підтримують усі типи проблем розміщення об'єктів

Закінчення таблиці 1

1	2	3	4
3	Мета-евристичні	• Швидко знаходять високоякісні рішення; • застосовуються зі складними типами проблем та динамічними середовищами	• Можуть не гарантувати оптимального рішення; • вимагають значних обчислень для великих задач
4	Багато-цільова оптимізація	• Дозволяють збалансувати кілька конфліктуючих цілей; • допомагають визначити компроміси та знайти оптимальні рішення щодо декількох цілей	• Складні для імплементації та аналізу; • потребують додаткових критеріїв прийняття рішень та участі зацікавлених сторін
5	Стохастичні	• Працюють з невизначеністю та мінливістю проблеми; • допомагають розробити більш надійні та гнучкі плани розміщення об'єктів	• Можуть бути більш складними для реалізації та аналізу; • вимагають додаткових даних та обчислювальних ресурсів для моделювання невизначеності та мінливості
6	Інтегровані	• Дозволяють оптимізувати весь ланцюг постачання та знайти рішення, які є оптимальними за багатьма параметрами; • допомагають визначити можливості для синергії та економії витрат	• Складні для імплементації та аналізу; • необхідні додаткові дані та обчислювальні ресурси для інтеграції декількох оптимізаційних задач
7	Континуальні	• Менше залежать від розмірності задачі	• Більш складна програмна реалізація алгоритму

Висновки. Задача розміщення об'єктів є важливою темою в галузі дослідження операцій. У цій роботі представлено огляд проблеми, її передумови та формулювання та обговорено різні підходи до розв'язання задачі розміщення об'єктів, включаючи точні методи, евристичні методи, метаевристичні методи та стохастичні методи. Кожен з цих підходів має свої сильні і слабкі сторони, і вибір методу залежить від конкретних характеристик задачі, що розглядається. В цілому, проблема розміщення об'єктів є складною і багатогранною та потребує ретельного вивчення та інноваційних рішень.

Подальші дослідження можуть бути зосереджені на побудові нових моделей практичних задач, що можуть бути зведені до багатоетапних задач з неперервно розподіленими ресурсами. Алгоритми розв'язання таких задач можуть краще справлятися з невизначеністю і складнощами реального світу. Крім того, можна дослідити потенційні переваги поєднання неперервних методів з іншими підходами до розв'язання, такими як метаевристика або стохастичні методи, для подальшого покращення продуктивності та застосовності в практичних сценаріях.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Location-Allocation and accessibility models for improving the spatial planning of public health services / G. Polo et al. *Plos one*. 2015. Vol. 10, no. 3. P. 1–14. URL: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0119190 (date of access: 22.04.2023).

2. Optimal mathematical programming for the warehouse location problem with Euclidean distance linearization / M. You et al. *Computers & industrial engineering*. 2019. Vol. 136. P. 70–79. URL: https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.020 (date of access: 22.04.2023).

3. A facility location model for municipal solid waste management system under uncertain environment / V. Yadav et al. *Science of the total environment*. 2017. Vol. 603–604. P. 760–771. URL: https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2017.02.207 (date of access: 22.04.2023).

4. An advanced decision-making model for evaluating manufacturing plant locations using fuzzy inference system / S. K. Paul et al. *Expert systems with applications*. 2022. Vol. 191. P. 116378. URL: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116378 (date of access: 22.04.2023).

5. Holmberg K., Rönnqvist M., Yuan D. An exact algorithm for the capacitated facility location problems with single sourcing. *European journal of operational research*. 1999. Vol. 113, no. 3. P. 544–559. URL: https://doi.org/10.1016/s0377-2217(98)00008-3 (date of access: 22.04.2023).

6. Christensen T. R. L., Klose A. A fast exact method for the capacitated facility location problem with differentiable convex production costs. *European journal of operational research*. 2020. URL: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.11.048 (date of access: 22.04.2023).

7. Gen M., Altiparmak F., Lin L. A genetic algorithm for two-stage transportation problem using priority-based encoding. *OR spectrum*. 2006. Vol. 28, no. 3. P. 337–354. URL: https://doi.org/10.1007/s00291-005-0029-9 (date of access: 22.04.2023).

8. Antony Arokia Durai Raj K., Rajendran C. A genetic algorithm for solving the fixed-charge transportation model: two-stage problem. *Computers & operations research*. 2012. Vol. 39, no. 9. P. 2016–2032. URL: https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.09.020 (date of access: 22.04.2023).

9. Cosma O., Pop P., Sabo C. An efficient solution approach for solving the two-stage supply chain problem with fixed costs associated to the routes. *Procedia computer science*. 2019. Vol. 162. P. 900–907. URL: https://doi.org/10.1016/j.procs.2019.12.066 (date of access: 22.04.2023).

10. Lee J.-E., Gen M., Rhee K.-G. Network model and optimization of reverse logistics by hybrid genetic algorithm. *Computers & industrial engineering*. 2009. Vol. 56, no. 3. P. 951–964. URL: https://doi.org/10.1016/j.cie.2008.09.021 (date of access: 22.04.2023).

11. Khan I., Pal S., Maiti M. K. A hybrid PSO-GA algorithm for traveling salesman problems in different environments. *International journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems*. 2019. Vol. 27, no. 05. P. 693–717. URL: https://doi.org/10.1142/s0218488519500314 (date of access: 22.04.2023).

12. Cosma O., Pop P. C., Dănciulescu D. A parallel algorithm for solving a two-stage fixed-charge transportation problem. *Informatica*. 2020. P. 1–26. URL: https://doi.org/10.15388/20-infor432 (date of access: 22.04.2023).

13. Salman M. Using tabu search algorithm for solving two-stage transportation problem based on decoding procedure. *Sci.Int.* 2018. Vol. 30, no. 4. P. 643–651.

14. Buson E., Roberti R., Toth P. A reduced-cost iterated local search heuristic for the fixed-charge transportation problem. *Operations research*. 2014. Vol. 62, no. 5. P. 1095–1106. URL: https://doi.org/10.1287/opre.2014.1288 (date of access: 22.04.2023).

15. Mestre A. M., Oliveira M. D., Barbosa-Póvoa A. P. Location–allocation approaches for hospital network planning under uncertainty. *European journal of operational research*. 2015. Vol. 240, no. 3. P. 791–806. URL: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.07.024 (date of access: 22.04.2023).

16. He L., Xie Z. Optimization of urban shelter locations using bi-level multi-objective location-allocation model. *International journal of environmental research and public health*. 2022. Vol. 19, no. 7. P. 4401. URL: https://doi.org/10.3390/ijerph19074401 (date of access: 22.04.2023).

17. Bieniek M. A note on the facility location problem with stochastic demands. *Omega*. 2015. Vol. 55. P. 53–60. URL: https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.02.006 (date of access: 22.04.2023).

18. You F., Grossmann I. E. Mixed-Integer nonlinear programming models and algorithms for large-scale supply chain design with stochastic inventory management. *Industrial & engineering chemistry research*. 2008. Vol. 47, no. 20. P. 7802–7817. URL: https://doi.org/10.1021/ie800257x (date of access: 22.04.2023).

19. A matheuristic for the two-stage fixed-charge transportation problem / H. I. Calvete et al. *Computers & operations research*. 2018. Vol. 95. P. 113–122. URL: https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.03.007 (date of access: 22.04.2023).

20. Hashemkhani Zolfani S., Arabzad S. M., Ghorbani M. A multi-objective robust optimization model for a facility location-allocation problem in a supply chain under uncertainty. *Engineering economics*. 2015. Vol. 26, no. 3. URL: https://doi.org/10.5755/j01.ee.26.3.4287 (date of access: 22.04.2023).

21. Кісельова О. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування. Дніпро : Ліра, 2018. 532 p.

22. Us S., Stanyna O. Location-allocation problems. *Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація.* 2017. № 1. С. 73–79.

23. Станіна О., Ус С., Коряшкіна Л. Моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом. Дніпро, 2021.

REFERENCES:

1. Polo, G., Acosta, C. M., Ferreira, F., & Dias, R. A. (2015). Location-Allocation and accessibility models for improving the spatial planning of public health services. *Plos One*, *10*(3), Stattia e0119190. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0119190

2. You, M., Xiao, Y., Zhang, S., Yang, P., & Zhou, S. (2019). Optimal mathematical programming for the warehouse location problem with Euclidean distance linearization. *Computers & Industrial Engineering*, *136*, 70–79. https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.020

3. Yadav, V., Bhurjee, A. K., Karmakar, S., & Dikshit, A. K. (2017). A facility location model for municipal solid waste management system under uncertain environment. *Science of the Total Environment*, *603–604*, 760–771. https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2017.02.207

4. Paul, S. K., Chowdhury, P., Ahsan, K., Ali, S. M., & Kabir, G. (2022). An advanced decision-making model for evaluating manufacturing plant locations using fuzzy inference system. *Expert Systems With Applications*, *191*, 116378. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116378

5. Holmberg, K., Rönnqvist, M., & Yuan, D. (1999). An exact algorithm for the capacitated facility location problems with single sourcing. *European Journal of Operational Research*, *113*(3), 544–559. https://doi.org/10.1016/s0377-2217(98)00008-3

6. Christensen, T. R. L., & Klose, A. (2020). A fast exact method for the capacitated facility location problem with differentiable convex production costs. *European Journal of Operational Research*. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.11.048

7. Gen, M., Altiparmak, F., & Lin, L. (2006). A genetic algorithm for two-stage transportation problem using priority-based encoding. *Or Spectrum*, *28*(3), 337–354. https://doi.org/10.1007/s00291-005-0029-9

8. Antony Arokia Durai Raj, K., & Rajendran, C. (2012). A genetic algorithm for solving the fixed-charge transportation model: Two-stage problem. *Computers & Operations Research*, *39*(9), 2016–2032. https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.09.020

9. Cosma, O., Pop, P., & Sabo, C. (2019). An efficient solution approach for solving the two-stage supply chain problem with fixed costs associated to the routes. *Procedia Computer Science*, *162*, 900–907. https://doi.org/10.1016/j.procs.2019.12.066

10. Lee, J.-E., Gen, M., & Rhee, K.-G. (2009). Network model and optimization of reverse logistics by hybrid genetic algorithm. *Computers & Industrial Engineering*, *56*(3), 951–964. https://doi.org/10.1016/j.cie.2008.09.021

11. Khan, I., Pal, S., & Maiti, M. K. (2019). A hybrid PSO-GA algorithm for traveling salesman problems in different environments. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, *27*(05), 693–717. https://doi.org/10.1142/s0218488519500314

12. Cosma, O., Pop, P. C., & Dănciulescu, D. (2020). A parallel algorithm for solving a two-stage fixed-charge transportation problem. *Informatica*, 1–26. https://doi.org/10.15388/20-infor432

13. Salman, M. (2018). Using tabu search algorithm for solving two-stage transportation problem based on decoding procedure. *Sci.Int.*, *30*(4), 643–651.

14. Buson, E., Roberti, R., & Toth, P. (2014). A reduced-cost iterated local search heuristic for the fixed-charge transportation problem. *Operations Research*, *62*(5), 1095–1106. https://doi.org/10.1287/opre.2014.1288

15. Mestre, A. M., Oliveira, M. D., & Barbosa-Póvoa, A. P. (2015). Location–allocation approaches for hospital network planning under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, *240*(3), 791–806. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.07.024

16. He, L., & Xie, Z. (2022). Optimization of urban shelter locations using bi-level multi-objective location-allocation model. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, *19*(7), 4401. https://doi.org/10.3390/ijerph19074401

17. Bieniek, M. (2015). A note on the facility location problem with stochastic demands. *Omega*, *55*, 53–60. https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.02.006

18. You, F., & Grossmann, I. E. (2008). Mixed-Integer nonlinear programming models and algorithms for large-scale supply chain design with stochastic inventory management. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, *47*(20), 7802–7817. https://doi.org/10.1021/ie800257x

19. Calvete, H. I., Galé, C., Iranzo, J. A., & Toth, P. (2018). A matheuristic for the two-stage fixed-charge transportation problem. *Computers & Operations Research*, *95*, 113–122. https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.03.007

20. Hashemkhani Zolfani, S., Arabzad, S. M., & Ghorbani, M. (2015). A multi-objective robust optimization model for a facility location-allocation problem in a supply chain under uncertainty. *Engineering Economics*, *26*(3). https://doi.org/10.5755/j01.ee.26.3.4287

21. Kiselova, O. (2018). *Stanovlennia ta rozvytok teorii optymalnoho rozbyttia mnozhyn. Teoretychni i praktychni zastosuvannia*. Lira [in Ukrainian].

22. Us, S., & Stanyna, O. (2017). Location-allocation problems. *Komputerne Modeluvanna: Analiz, Upravlinna, Optimizacia, 1,* 73–79.

23. Stanina, O., Us, S., & Koriashkina, L. (2021). *Modeli ta metody rozviazannia zadach optymalnoho rozmishchennia dvoetapnoho vyrobnytstva z neperervno rozpodilenym resursom* [in Ukrainian].