УДК 517.91:532.2
DOI https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-8

Світлана СИВАШ
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри «Математика, фізика та астрономія», Одеський національний морський університет, вул. Мечникова, 34, м. Одеса, Україна, 65029, rusboris@ukr.net
***ORCID:** 0000-0002-9726-7865*

Галина СОКОЛОВСЬКА
старший викладач кафедри «Математика, фізика та астрономія», Одеський національний морський університет, вул. Мечникова, 34, м. Одеса, Україна, 65029, sokolovskahalyna7@gmail.com
***ORCID:** 0000-0001-8161-1660*

Бібліографічний опис статті: Сиваш, С., Соколовська, Г. (2023). Наближене розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності з екстремальною граничною умовою. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 2, 71–75, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-8

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЕКСТРЕМАЛЬНОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ

Широке коло прикладних задач математичної фізики, астрофізики приводить до пошуку розв'язків задач мінімізації квадратичних функціоналів. Зокрема, задачі мінімізації квадратичних функціоналів виду $\| (Au)(x) - g(x) \|^2 = \int_{R_n} \rho(x) |(Au)(x) - g(x)|^2 dx \to \inf$ *з операторами згортки* $(Au)(x) = \int_{\Omega} k(x-s)u(s)ds, \ \ \Omega \subset R_n$ *часто зустрічаються в теорії механізмів, лінійних електричних та радіотехнічних ланцюгів, оптимальних фільтрів, систем регулювання. Некоректні задачі для лінійних рівнянь також приводяться до розв'язку задач мінімізації квадратичних функціоналів.*

Відомо, що екстремальні задачі допускають розв'язки у явному вигляді лише в деяких окремих випадках. Тому побудова та обґрунтування методів їх наближеного розв'язання має значний теоретичний та практичний інтерес. Застосування чисельних методів відкриває можливості побудови розв'язків нових екстремальних задач для рівнянь математичної фізики та алгоритмізації цього процесу.

У роботі поставлена задача стаціонарної теплопровідності з екстремальною граничною умовою. За допомогою перетворення Фур'є та формул Сохоцького вона зводиться до розв'язання матричної задачі Рімана на дійсній осі з непозитивною системою часткових індексів. Доведена еквівалентність цих задач з точки зору їх розв'язності та формули, які виражають залежність розв'язку екстремальної задачі від розв'язків відповідної задачі Рімана. На основі дослідження задачі Рімана встановлено умови нормальної розв'язності екстремальної задачі. Наближені розв'язки екстремальної задачі будуються на основі наближених розв'язків задачі Рімана. Запропоновано та обґрунтовано проекційний метод їх знаходження. Проведена оцінка збіжності наближених розв'язків екстремальної задачі до її точного розв'язку.

Досліджено також винятковий випадок екстремальної задачі та побудовано відповідні наближені розв'язки.

Окрім того, проведено чисельний експеримент для конкретних значень параметрів задачі, результати якого повністю узгоджуються з теоретичними висновками. Це підтверджує високу ефективність запропонованого методу побудови наближених розв'язків екстремальних задач математичної фізики. Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні задач теорії пружності та термопружності, теплопровідності та інших прикладних задач.

***Ключові слова:** задача Рімана, крайова задача, частковий індекс, розв'язність, нетеровість, наближений розв'язок.*

Svitlana SYVASH
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department "Mathematics, Physics and Astronomy", Odesa National Maritime University, Mechnikova str., 34, Odesa, Ukraine, 65029, rusboris@ukr.net
***ORCID:** 0000-0002-9726-7865*

Galyna SOKOLOVSKA
Senior Lecturer at the Department "Mathematics, Physics and Astronomy", Odesa National Maritime University, Mechnikova str., 34, Odesa, Ukraine, 65029, sokolovskahalyna7@gmail.com
***ORCID:** 0000-0001-8161-1660*

To cite this article: Syvash, S., Sokolovska, G. (2023). Nablyzhene rozvyazannya zadachi statsionarnoyi teploprovidnosti z ekstremalnoyu hranychnoyu umovoyu [Approximate solution of the stationary heat conduction problem with an extreme boundary condition]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 2, 71–75, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-8

APPROXIMATE SOLUTION OF STATIONARY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM WITH EXTREME BOUNDARY CONDITION

A wide range of applied problems of mathematical physics and astrophysics leads to the search for solutions to problems of minimization of quadratic functionals. In particular, problems of minimization of quadratic functionals of the form $\| (Au)(x) - g(x) \|^2 = \int_{R_n} \rho(x) |(Au)(x) - g(x)|^2 dx \to \inf$ *with convolution operators* $(Au)(x) = \int_{\Omega} k(x-s)u(s)ds, \ \Omega \subset R_n$ *often found in the theory of mechanisms, linear electric and radio engineering circuits, optimal filters, control systems. Incorrect problems for linear equations also lead to the solution of minimization problems of quadratic functionals.*

It is known that extremal problems admit solutions in an explicit form only in some individual cases. Therefore, the construction and substantiation of methods for their approximate solution is of significant theoretical and practical interest. The use of numerical methods opens up the possibility of constructing solutions to new extreme problems for the equations of mathematical physics and algorithmizing this process.

The paper presents the problem of stationary thermal conductivity with an extreme boundary condition. With the help of the Fourier transform and Sohotsky formulas, it is reduced to the solution of the Riemann matrix problem on the real axis with a non-positive system of partial indices. The equivalence of these problems is proved from the point of view of their solvability and formulas expressing the dependence of the solution of the extremal problem on the solutions of the corresponding Riemann problem. Based on the study of the Riemann problem, the conditions for the normal solvability of the extremal problem have been established. Approximate solutions of the extremal problem are constructed on the basis of approximate solutions of the Riemann problem. A projection method for finding them is proposed and substantiated. Convergence of approximate solutions of the extreme problem to its exact solution was evaluated.

The exceptional case of the extremal problem was also studied and the corresponding approximate solutions were constructed.

In addition, a numerical experiment was conducted for specific values of the parameters of the problem, the results of which are fully consistent with the theoretical conclusions. This confirms the high efficiency of the proposed method of constructing approximate solutions of extreme problems of mathematical physics. The obtained results can be used in solving problems of the theory of elasticity and thermoelasticity, thermal conductivity and other applied problems.

Key words: *Riemann problem, boundary value problem, partial index, solvability, netherness, approximate solution.*

Актуальність проблеми. Численні задачі математичної фізики, теорії пружності, теплопровідності приводять до пошуку розв'язків задач мінімізації квадратичних функціоналів. Зокрема, задачі мінімізації квадратичних функціоналів

$$\| (Au)(x) - g(x) \|^2 = \int_{R_n} \rho(x) |(Au)(x) - g(x)|^2 dx \to \inf$$

з операторами згортки

$$(Au)(x) = \int_{\Omega} k(x-s)u(s)ds, \ \Omega \subset R_n$$

часто зустрічаються в теорії механізмів, лінійних електричних та радіотехнічних ланцюгів, оптимальних фільтрів, систем регулювання. Некоректні задачі для лінійних рівнянь $Au = g$ також приводяться до розв'язування задач мінімізації квадратичних функціоналів.

Відомо, що екстремальні задачі допускають розв'язки у явному вигляді лише в деяких окремих випадках. Тому побудова та обґрунтування методів їх наближеного розв'язання має значний теоретичний та практичний інтерес. Це обумовлює актуальність даної проблеми та є значущим фактором з точки зору розширення кола застосувань. Водночас розвиток чисельних методів відкриває можливості побудови розв'язків нових екстремальних задач для рівнянь математичної фізики та алгоритмізації цього процесу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перевизначені та недовизначені задачі математичної фізики, що мінімізують функціонали нев'язки, вивчались у роботах С. Крейна, С. Львіна. У подальшому дослідження таких задач були продовжені у роботах А. Штайнера (Steiner, 1970). Вагомі результати досліджень екстремальних задач для рівнянь математичної фізики та сингулярних інтегральних рівнянь отримав Ю. Черський. Крайові задачі із застосуванням методу гібридних інтегральних перетворень досліджувалися в роботі (Ленюк, 2004). Питання аналітично продовжуваних у півплощину функцій, деякі задачі термопружності, що зводяться до матричної задачі Рімана, вивчалися в роботі (Кривий, Морозов, 2020).

Мета дослідження. Ставиться завдання дослідити розв'язність та побудувати розв'язки екстремальної задачі стаціонарної теплопровідності, що зводиться до розв'язання матричної задачі Рімана на дійсній осі.

Виклад основного матеріалу. Досліджується задача про стаціонарний розподіл тепла у пластині $0<y<+\infty$, $-\infty<x<+\infty$, де задано температуру краю $y=0,\ -\infty<x<0$; на краї $y=0,\ 0<x<\infty$ конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем набуває мінімуму. Отже, потрібно знайти в області $0<y<+\infty$, $-\infty<x<+\infty$ функцію $u(x,y)$, яка задовольняє рівняння

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (1)$$

та умови

$$u(x,0)=0,\ \ x<0, \qquad (2)$$

$$\int_0^\infty \left|\alpha u\ (x,\ 0)+\beta u_y(x,\ 0)-g(x)\ \right|^2 dx+$$

$$+\int_0^\infty \left|\gamma u\ (x,\ 0)+\delta u_y(x,\ 0)-h(x)\ \right|^2 dx\to \inf, \quad (3)$$

де $g(x)$, $h(x)$ – відомі функції, а α, β, γ, δ – відомі сталі.

Нехай $L_2[-m;\ -n]$, де m, n – цілі невід'ємні числа, – простір функцій $\phi(x)$, заданих на дійсній осі R, для яких

$$\left(\frac{d}{dx}+1\right)^n [\ (x+i)^m\phi(x)\ ]\in L_2 .$$

Позначимо $L_{2+}[-m;\ -n]$ $\left(L_{2-}[-m;\ -n]\right)$ – простір функцій $\phi_+(x)$ $(\phi_-(x))\in L_2[-m;\ -n]$, таких, що $\phi_+(x)\equiv 0$ при $x<0$ ($\phi_-(x)\equiv 0$ при $x>0$).

За допомогою перетворення Фур'є та формул Сохоцького екстремальна задача (1) – (3) зводиться до наступної задачі Рімана:

$$\lambda(x)B(x)F^+(x)-F^-(x)=b(x),\ \ x\in R, \qquad (4)$$

де $$F^{\pm}(x)=\{F_1^{\pm}(x);\ F_2^{\pm}(x);\ F_3^{\pm}(x)\}^{\ T},$$

$$\lambda(x)=diag\left\{1;\ \frac{x-i}{x+i};\ \frac{x-i}{x+i}\ \right\},$$

$$b(x)=\{(\alpha-\beta\,|\,x\,|)\ G^+(x)+(\gamma-\delta\,|\,x\,|)\ H^+(x);\ 0;\ 0\}^{\ T},$$

$$B(x)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha-\beta\ |x|}{x+i} & \dfrac{\gamma-\delta\ |x|}{x+i} \\ -\dfrac{\alpha-\beta\ |x|}{x+i} & 1 & 0 \\ -\dfrac{\gamma-\delta\ |x|}{x+i} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $G^+(x)$, $H^+(x)$ – перетворення Фур'є функцій $g(x)$, $h(x)$; невідомі функції $F_j^+(x)\in L_2^+$, $F_j^-(x)\in L_2^-$, j=1,2,3, аналітично продовжуються у верхню $D^+=\{z\in C:\ \operatorname{Im} z>0\ \}$ та нижню $D^-=\{z\in C:\ \operatorname{Im} z<0\ \}$ півплощину.

Доведено, що екстремальна задача (1) – (3) та задача Рімана (4) є еквівалентними з точки зору розв'язності. При цьому розв'язки екстремальної задачі (1) – (3) виражаються через розв'язки задачі Рімана (4) за формулами

$$u(x,\ y)=\frac{y}{\pi}\int_0^\infty \frac{u(s,\ 0)}{(x-s)^2+y^2}\,ds,\ \ x\in R,\ \ y>0, \quad (5)$$

$$u(x,\ 0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R (t+i)^{-2}F_1^+(t)\ e^{-ixt}\ dt,\ \ x>0, \quad (6)$$

де $F_1^+(x)\in L_2^+$ – розв'язок задачі Рімана (4). Встановлено, що екстремальна задача (1) – (3) є нормально розв'язною, якщо виконується умова $\alpha\delta-\gamma\beta\neq 0$. У цьому випадку часткові індекси матимуть такі значення: $æ_1=0$,

$$æ_2=\begin{cases} -1,\ \text{якщо}\ \beta^2+\delta^2\le 0{,}5\ ; \\ -2,\ \text{якщо}\ \beta^2+\delta^2>0{,}5\ ; \end{cases}$$

$$æ_3 = \begin{cases} -2, \text{ якщо } \beta^2 + \delta^2 \le 0{,}5 \ ; \\ -1, \text{ якщо } \beta^2 + \delta^2 > 0{,}5 \ . \end{cases}$$

З цього випливає, що екстремальна задача (1) – (3) є розв'язною та має єдиний розв'язок, якщо функції $g(x)$ та $h(x)$ належать простору $L_{2+}\left[0;\ -1\right]$ та задовольняють певні умови розв'язності в залежності від значень частинних індексів.

Наближені розв'язки екстремальної задачі (1) – (3) будуються на основі наближених розв'язків задачі Рімана (4). Для неї ж наближені розв'язки шукаємо у вигляді

$$F_n^+(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \psi_k(x)\ ,\ F_n^-(x) = -\sum_{k=-n}^{-1} f_k \psi_k(x)\ ,$$

$$\Psi_k(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k \frac{2i}{x+i}\ .$$

Невідомі вектори $f_k = \left\{f_k^{(1)},\ f_k^{(2)},\ f_k^{(3)}\right\}^T$ мають сталі компоненти. У випадку метода Бубнова – Гальоркіна шукаємо їх з системи рівнянь

$$F_n^+(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{jk} f_k(x) + \gamma_0 f_j = b_j\ ,\ j = \overline{-n,\ n}\ , \quad (7)$$

де $\gamma_0 = 0$ при $j \ge 0$ та $\gamma_0 = 1$, якщо $j < 0$, а A_{jk} та b_j – коефіцієнти Фур'є відповідно матриці $\lambda(x) B(x) \Psi_k(x)$ та вектору $b(x)$ за системою функцій

$\Psi_j(x)$. Тоді наближені розв'язки екстремальної задачі (1) – (3) набувають вигляду

$$u_n(x,\ y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u_n\ (s,\ 0)}{(x-s)^2 + y^2}\ ds\ ,\ x \in R\ ,\ y > 0\ , \quad (8)$$

$$u_n(x,\ 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R (t+i)^{-2} F_{1n}^+(t)\ e^{-ixt}\ dt\ ,\ x > 0\ , \quad (9)$$

де $F_{1n}^+(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{(1)} \psi_k(x)$, а $f_k^{(1)}$ – розв'язки системи рівнянь (7). Доведено, що система рівнянь (7) є сумісною при достатньо великих значеннях n, а наближені розв'язки $F_n^{\pm}(x)$ задачі Рімана (4) збігаються до її точних розв'язків зі швидкістю

$$\| F^{\pm}(x) - F_n^{\pm}(x) \|_{L_2} = O\ \left(n^{-1}\right).$$

З цієї оцінки на основі рівності Парсеваля та рівностей (5), (6) та (8), (9) випливає, що наближені розв'язки $u_n\ (x,y)$ екстремальної задачі (1) – (3) збігаються до її точного розв'язку $u(x,\ y)$ зі швидкістю

$$\| u(x,\ y) - u_n\ (x,\ y) \|_{L_2} = O\ \left(n^{-1}\right)$$

рівномірно по $y \in (0;\ +\infty)$.

Досліджено також винятковий випадок екстремальної задачі (1) – (3), коли задовольняються умови $\alpha = k\beta,\ \gamma = k\delta,\ k = const \ge 1$. У цьому випадку функції $g(x)$ та $h(x)$ належать простору $L_{2+}\left[-3;\ -1\right]$ та задовольняють цілком визначені умови розв'язності. Для цього випадку наближені розв'язки екстремальної задачі (1) – (3) також будуються за викладеною вище схемою з використанням результатів по наближенню функцій на дійсній осі відрізками рядів Фур'є по базисним системам функцій

$$\Psi_k(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k \frac{2i}{x+i}\ ,\ k = 0, \pm 1, \ldots, \quad x \in R\ .$$

Також досліджено екстремальну задачу (1) – (3) для випадку $\alpha = 1,\ \ \beta = 2,\ \ \gamma = 3,\ \ \delta = 4;$ $g(x) = x \cdot e^{-x}$, $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Для цього випадку система рівнянь (7) була реалізована при різних значеннях n.

Висновки. Отримані результати підтверджують високу ефективність запропонованого методу побудови наближених розв'язків екстремальних задач математичної фізики. Він може бути використаний при дослідженні інших крайових задач з екстремальною граничною умовою, екстремальних задач з операторами згортки. Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні задач теорії пружності та термопружності, теплопровідності та інших прикладних задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Steiner A. Zum Mexanizmus der Quazianalytizit at gemisser Randfunctionen anf endlichen Intervalen. *Annales Acad. Scient. Finn. Mathem. Helsinki,* 1970. Ser. A. I. 459. P. 3–33.

2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. *Тернопіль : Економ. Думка.* 2004. 368 с.

3. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Вид. Либідь. 2006. 424 с.

4. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. *Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка»*, 2010. 384 с.

5. Kryvyi O. F., Morozov O. Yu. The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecwise homogeneous transversely isotropic elastic space. Дослідження в математиці і механіці. Том 25 № 1(35) (2020) С.16–30.

6. Черський Ю. Й. Багатомірне парне рівняння на узгоджених множинах. *Доповіді АН УРСР, серія А.* 1988. № 6. С. 24–25.

7. Керекеша Д. П. До теорії задачі Карлемана для смуги з аналітичним продовженням у верхню півплощину. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь* : зб. наук. праць. Чернівці : Прут, 2005. Вип. 12. С. 129–136.

REFERENCES:

1. Steiner A. (1970). Zum Mexanizmus der Quazianalytizit at gemisser Randfunctionen anf endlichen Intervalen. [On the mechanism of quasi-analyticity of measured boundary functions on finite intervals]. *Annales Acad. Scient. Finn. Mathem. Helsinki, Ser. A. I.* 459, 3–33 [in German].

2. Leniuk M. P. (2004). Hibrydni intehralni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1 / M. P. Leniuk, M. I. Shynkaryk. [Hybrid integral transformations (Fourier, Bessel, Legendre). Part 1]. *Ekonomichna dumka. Ternopil. Economic thought* [in Ukrainian].

3. Perestiuk M. O., Marynets V. V. (2006). Teoriia rivnian matematychnoi fizyky. [Theory of equations of mathematical physics]. *Lybid. Kyiv-Lybid* [in Ukrainian].

4. Markovych B. M. (2010). Rivniannia matematychnoi fizyky. [Equations of mathematical physics]. Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu “Lvivska politekhnika”. Lviv – Publishing house of the National University “Lviv Polytechnic” [in Ukrainian].

5. O. F. Kryvyi, O. Yu. Morozov. (2020). The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecwise homogeneous transversely isotropic elastic space. *Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi – Research in mathematics and mechanics,* Vol. 25, № 1, 16–30 [in English].

6. Cherskyi Yu. Y. (1988). Bahatomirne parne rivniannia na uzghodzhenykh mnozhynakh. [Multivariate pairwise equation on consistent sets]. *Dopovidi AN URSR – Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Ser. A,* № 6, 24–25 [in Ukrainian].

7. Kerekesha D. P. (2005). Do teorii zadachi Karlemana dlia smuhy z analitychnym prodovzhenniam u verkhniu pivploshchynu. [To the theory of the Karleman problem for a strip with an analytic extension into the upper half-plane. Boundary value problems for differential equations]. *Kraiovi zadachi dlia dyferentsialnykh rivnian. Zb. nauk. prats. Chernivtsi. – Boundary value problems for differential equations. Coll. of science works,* Vol. 12, 129–136 [in Ukrainian].