УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.32782/IT/2023-4-3

Лариса КОРЯШКІНА
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, koriashkina.l.s@nmu.one
ORCID: *0000-0001-6423-092X*
Scopus Author ID: *55844269100*

Данило ЛУБЕНЕЦЬ
аспірант кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, Україна, 49005, lubenets.d.y@nmu.one
ORCID: *0009-0000-8563-3760*

Бібліографічний опис статті: Коряшкіна, Л., Лубенець, Д. (2023). Математичні моделі та методи мультиплексного розбиття і багатократного покриття множин для задач розміщення-розподілу. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 4, 20–31, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-4-3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ І БАГАТОКРАТНОГО ПОКРИТТЯ МНОЖИН ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛУ

Розроблено математичні моделі для задач оптимального розміщення сервісних центрів й розподілу транспортних потоків, а також зонування територій, задля оцінювання місткості розміщуваних центрів та необхідної кількості транспортних засобів у логістичних системах. Представлені моделі та методи оптимального розбиття області на зони обслуговування центрів за критеріями мінімальної відстані або найскорішого надання сервісу, враховуючи можливість забезпечення послугою будь-яким з декількох найближчих до споживачів сервісних центрів. Моделі неперервних задач оптимального багатократного кульового покриття множин удосконалено на випадок врахування особливості множини, на якій можуть бути розміщені центри, що забезпечує уникнення розташування центрів занадто близько один від одного. Описано методи і наближені алгоритми розв'язання вказаних задач. Наведено аналіз результатів обчислювальних експериментів.

Ключові слова: *логістика, зонування території, багатократне покриття множини, математичне моделювання, мультиплексне розбиття множин, потужність центру.*

Larysa KORIASHKINA
PhD, Associate Professor, Associate Professor at Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, 19, Dmytra Yavornytskoho Ave, Dnipro, Ukraine, 49005, koriashkina.l.s@nmu.one
ORCID: *0000-0001-6423-092X*
Scopus Author ID: *55844269100*

Danylo LUBENETS
Postgraduate Student of Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, 19, Dmytra Yavornytskoho Ave, Dnipro, Ukraine, 49005, lubenets.d.y@nmu.one
ORCID: *0009-0000-8563-3760*

To cite this article: Koriashkina, L., Lubenets, D. (2023). Matematychni modeli ta metody multypleksnoho rozbyttia i bahatokratnoho pokryttia mnozhyn dlia zadach rozmishchennia-rozpodilu [Mathematical models of multiplex partitioning and multiple coverage of sets for the location-allocation problems]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 4, 20–31, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-4-3

MATHEMATICAL MODELS OF MULTIPLEX PARTITIONING AND MULTIPLE COVERAGE OF SETS FOR THE LOCATION-ALLOCATION PROBLEMS

We developed the mathematical models for the problems of optimal service centers' placement and traffic flow distribution, as well as area zoning to estimate the capacity of the located centers and the necessary number of vehicles in logistics systems. Presented are models and methods of optimal division of the region into service center zones based on the criteria of the minimum distance or the fastest service providing the service by any of several service centers closest to consumers. The mathematical formulation of the continuous problem of optimal multiple coverage of sets is improved by considering the peculiarity of the set on which the centers can be placed, which ensures the avoidance of the location of centers too close to each other. Methods and approximate algorithms for solving these problems are described. An analysis of the results of computational experiments is presented.

Key words: *logistics, area zoning, multiple coverage of set, mathematical modeling, multiplex partitioning of sets, center capacity.*

Вступ. Існує велика кількість робіт вчених і практиків, у яких піднімаються різні аспекти математичного моделювання і методів розв'язання оптимізаційних задач розміщення-розподілу. Такі задачі виникають, зокрема, під час розробки комплексу запобіжних заходів щодо організації процесів евакуації населення або надання первинної гуманітарної допомоги у разі надзвичайних ситуацій. На сьогодні в науковій літературі запропоновано чимало моделей для задач раціонального територіального розподілу елементів систем екстреної логістики. Широко представлені дослідження евакуаційних процесів з використанням моделей і методів математичного програмування [1, 2]. Серед них є моделі розміщення-розподілу для складання планів евакуації під час ураганів або землетрусів, пошуку оптимальних маршрутів евакуації і місць укриття у випадках міських надзвичайних ситуацій. В даній роботі запропоновано для математичного опису оптимізаційних задач розміщення підрозділів систем екстреної логістики використовувати моделі і методи теорії оптимального мультиплексного розбиття і багатократного покриття множин [3, 4].

Мета даної роботи є розроблення моделей і методів розв'язання для логістичних задач, зокрема, в системах екстреної логістики, що дозволить завчасно визначати зони екстреної допомоги, проводити організацію логістичних процесів, раціонально розподіляючи транспортні та матеріальні ресурси.

Об'єктом дослідження є територіальний розподіл елементів транспортно-логістичних систем.

Предметом дослідження є моделі та методи оптимального розміщення структурних підрозділів транспортно-логістичних систем з визначенням зон їх обслуговування.

Постановка проблеми. Будемо розглядати наступну задачу. Нехай в деякому регіоні потрібно розмістити центри рятувальних служб або пунктів первинної медичної допомоги на випадок надзвичайних ситуацій у такий спосіб, аби надання відповідної послуги можна було здійснити в найкоротший термін навіть найвіддаленішому мешканцю регіону. До того ж, для кожного центру потрібно визначити зону відповідальності. Це означає, що потрібно розбити територію регіону на підрегіони, мешканці кожного з яких обслуговуватимуться певним центром або центрами, якщо припустити можливість перекриття зон підпорядкування.

Літературний огляд. Наведемо тут короткий огляд останніх публікацій, які розглядають питання математичного моделювання практичних задач, що зводяться до задач кульового покриття множини. В роботі [5] на основі формалізації критеріїв повноти покриття побудовано узагальнену математичну модель задачі покриття довільної області ідентичними колами. При цьому отримано задачу негладкої оптимізації з областю допустимих розв'язків, що задається системою нерівностей. Останні слугують для врахування технологічних обмежень, що записується за допомогою phi-функцій. Авторами розроблено засоби генерації множини реалізацій узагальненої математичної моделі покриття для широкого класу прикладних задач. Запропоновано стратегію розв'язку виникаючих задач нелінійного програмування.

Проблема пошуку найкращих місць розміщення центрів з покриттям області зонами обслуговування так, аби мінімізувати загальну кількість об'єктів, необхідних для задоволення всіх вимог, розглянуто в роботі [6]. Вивчається новий варіант проблеми, який називається проблемою розташування покриття з контролем перекриття. Ця задача моделює реальні контексти, пов'язані з перевантаженими системами відвідуваності, які потребують зон покриття з перекриттям. Таким чином, кожна вимога має бути покрита певною кількістю додаткових об'єктів, щоб гарантувати, що вимоги будуть задоволені, навіть якщо призначений об'єкт не може це зробити через певну проблему об'єкта. Ця функція важлива в державних і екстрених службах. Практика розв'язання задач багатократного покриття показує, що кількість додаткових об'єктів, що покривають, є надмірною в деяких точках попиту. В зазначеній роботі автори намагаються здійснювати контроль збігів, щоб визначити пріоритетність регіонів із високою щільністю населення або мінімізувати кількість зон покриття для кожної точки попиту. Ними запропоновано нову математичну модель, яка контролює перекриття між зонами покриття.

В [6] також розглянуто клас задач покриття області множиною геометричних об'єктів заданої форми. Тут для формалізації задачі використовується поняття конфігураційного простору геометричних об'єктів, узагальненими змінними якого є метричні та параметри розміщення. Побудовано математичну модель задачі як задачі нелінійної оптимізації та досліджено її властивості. Практичне застосування запропонованих результатів описано на прикладі вирішення задачі визначення місця розміщення пожежних постів з метою забезпечення пожежної безпеки населених пунктів.

Задачі оптимізації розподільчих процесів в ієрархічних транспортно-логістичних системах вивчаються в [7]. Авторами запропоновано математичні моделі двоетапних і частково-двоетапних задач оптимального розподілу матеріальних потоків в системах екстреної логістики.

Роботи [9, 10] пропонують дискретно-неперервні моделі для задач оптимального розміщення сервісних центрів з обмеженнями, що враховують вартість об'єктів, включаючи постійні витрати на відкриття та змінні витрати, пов'язані з потужністю центрів. Проблема розташування об'єктів передбачає оптимальне розміщення набору об'єктів, які повинні задовольняти запити групи споживачів, розподілених на площинній території. В роботі [9] розташування існуючих об'єктів відомі та класифікуються як окремі. З іншого боку, розташування нових об'єктів, які необхідно знайти, класифікуються як безперервні та дискретні. Крім того, оптимальна кількість нових об'єктів визначається за формулою судження. Авторами розроблено жадібний багатофазний метод локації для запропонованої задачі частково цілочисельного лінійного програмування, який ефективно визначає точні місцезнаходження нових об'єктів поетапно. Для задач великої розмірності розробили динамічну ітераційну часткову оптимізацію на основі двох змінних, щоб отримати майже оптимальні рішення протягом заданого ліміту часу. В роботі [10] запропонована математична модель для задачі раціонального вибору місць розташування сервісних центрів на базі існуючих об'єктів із одночасним розбиттям території на зони обслуговування центрів з можливим перекриттям цих зон задля збільшення ймовірності отримання клієнтом послуги.

В даній роботі розглядаються математичні моделі для задач оптимального розміщення-розподілу у вигляді неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття та багатократного покриття множин. За своїми інтерпретаціями ці задачі є спорідненими. Далі продемонстровано зв'язок між вказаними задачами у різних їх постановках, можливість визначати радіус кульового покриття, розв'язуючи неперервні лінійні задачі мультиплексного розбиття множин. Показано, яким має бути критерій якості мультиплексного розбиття множин, аби у відповідній задачі з розміщенням центрів можна було б отримати таке їх розташування, яке збігатиметься з центрами куль мінімального радіусу, котрі *k*–кратно покривають задану множину.

Матеріали та методи. Введемо наступні позначення: $\Omega \subset E_2$ – заданий регіон; $\rho(x), x \in \Omega$ – невід'ємна функція, що описує щільність розподілу мешканців на території регіону Ω; N – кількість рятувальних об'єктів, що потрібно розмістити у регіоні Ω; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}\right) \in \Omega$, для усіх $i = 1,\ldots,N$, – координаті цих об'єктів (далі центрів); $\mathrm{N} = \{1,2,...,N\}$ – множина всіх індексів центрів; *k* – кратність зонування, тобто на допомогу якої максимальної кількості рятувальних об'єктів може розраховувати клієнт; $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ – множина всіх *k*-елементних підмножин множини N, $|\mathrm{M}(\mathrm{N},k)| = L$; $\sigma_l = \left\{j_1^l, j_2^l,..., j_k^l\right\}$, $l = \overline{1,L}$ – елементи множини $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$; Ω_{σ_l} – підмножина точок із Ω, $l = \overline{1,L}$, яка відповідає елементу σ_l множини $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ або (що є тим самим) набору центрів $\left\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l},..., \tau_{j_k^l}\right\}$; $\Sigma_\Omega^{N,k}$ – клас всіх можливих розбиттів k -го порядку множини Ω; $c(x,\tau_i)/w_i$ – час, за який можна дістатися від центру τ_i до точки $x \in \Omega$, $c(x,\tau_i)$ – метрика, що визначає відстань між двома точками, $1/w_i > 0$ – коефіцієнт пропорційності; a_i – умовна вартість надання послуги центром τ_i, розрахована на одного потенційного клієнта (постраждалого, користувача); b_1, b_2, ..., b_N – так звані «потужності» рятувальних центрів, що визначають певним чином максимально можливу кількість користувачів, на яку розрахований відповідний центр.

Математичну формалізацію задачі зробимо за допомогою моделей неперервних задач мультиплексного розбиття множин з певним критерієм якості.

Задача 1. Потрібно

$$F_R\left(\bar{\omega},\tau^N\right)=\max_{l=\overline{1,L}}\sup_{x\in\Omega_{\sigma_l}}\max_{i\in\sigma_l}\left(c\left(x,\tau_i\right)/w_i+a_i\right)\rho(x)\to\min_{\substack{\bar{\omega}\in\Sigma_\Omega^{N,k}\\ \tau^N\in\Omega^N}},\quad(1)$$

за умов

$$Capacity\left(\tau_i\right)=b_i,\quad i=\overline{1,p},$$

$$Capacity\left(\tau_i\right)\le b_i,\quad i=\overline{p+1,N},\qquad(2)$$

де $Capacity(\tau_i)=\sum_{\substack{l=1\\ l:\,i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx\quad i=\overline{1,N}$,

а коефіцієнти γ_i^l у лівих частинах обмежень залежать певним чином від потужностей центрів і для всіх $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,L}$:

$$0\le\gamma_i^l\le1,\ \ \gamma_{j_1^l}^l+\gamma_{j_2^l}^l+...+\gamma_{j_k^l}^l=1.\qquad(3)$$

Наприклад, якщо вважати, що виклики на допомогу можуть бути прийняті і оброблені об'єктами на всій області Ω пропорційними їхнім потужностям, то для всіх $l=\overline{1,L}$ і для всіх $j=\overline{1,N}$, таких, що $j\in\sigma_l$, величина γ_i^l може бути задана наступним виразом: $\gamma_j^l=b_j/\sum_{q:q\in\sigma_l}b_q$.

За таких міркувань обмеження (3) вказують на те, що всі можливості центрів τ_i, $i=1,..,p$, мають бути повністю використані, а для решти центрів τ_i, $i=p+1,..,N$, вони є обмеженими.

Стисло задачу **1** називатимемо *задачею оптимального багатократного покриття множини при обмеженнях* з оглядом на те, що за певних вихідних даних цільовий функціонал визначає величину радіуса оптимального покриття $R\left(\tau_*^N\right)=\inf_{\tau^N}\sup_{x\in\Omega}\min_{i=1,...,N}c\left(x,\tau_i\right)$.

Наведемо математичну постановку задач багатократного покриття обмеженої в E_2 області колами мінімального радіусу, використовуючи математичний апарат теорії неперервних задач оптимального покриття множин [12].

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом замкнена множина у просторі E_2, $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},\tau_i^{(2)}\right)\in\Omega$, для усіх $i=1,\ldots,N$, – деякі точки, що звуться «центрами» (вони можуть бути фіксованими або підлягати визначенню). $B\left(\tau_i,R\right)=\left\{x\in E_n:c\left(x,\tau_i\right)\le R\right\}$ – ***c***-куля радіуса R з центром у точці τ_i з Ω, де $c\left(x,\tau_i\right)$ – метрика.

Сукупність центрів $\tau_1,...,\tau_N$ задає *k*–кратне кульове покриття множини Ω з радіусом $\widehat{R}$, якщо

$$\Omega\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}B\left(\tau_i,\widehat{R}\right),$$

і для кожної точки $x\in\Omega$ виконується умова

$$x\in\bigcap_{j=1}^{l}B\left(\tau_{i_j},\widehat{R}\right),\ i_j\in\{1,2,...,N\},\ k\le l\le N.$$

Радіус $\widehat{R}$ ***k***–кратного покриття множини Ω, котре генерується центрами $\tau_1,...,\tau_N$ (вектором τ^N), визначається за наступною формулою:

$$\widehat{R}\left(\tau^N\right)=\sup_{x\in\Omega}\min_{i=1,...,N}c\left(x,\tau_i\right),\qquad(4)$$

при цьому для кожної точки $x\in\Omega$ виконується умова

$$x\in\bigcap_{j=1}^{l}B\left(\tau_{i_j},\widehat{R}\right),\ k\le l\le N,\ i_j\in\{1,2,...,N\},\quad(5)$$

де $\tau^N=(\tau_1,...,\tau_N)\in E_n^N$ (або, в окремому випадку, $\tau^N=(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N$).

k–кратне покриття множини Ω, що задається вектором $\tau^N=(\tau_1,...,\tau_N)$, з радіусом $\widehat{R}\left(\tau^N\right)$, який визначається за формулою (4) й задовольняє умови (5), є **мінімальним *k*–кратним *c*-кульовим покриттям**, яке генерується вектором τ^N. Це означає, що жоден набір ***c***-куль меншого радіусу з центрами в точках $\tau_1,...,\tau_N$ не покриває ***k***–кратно множину Ω. А ***k***–кратне покриття мінімального радіусу називається **оптимальним *k*–кратним покриттям**.

Отже, для пошуку оптимального ***k***–кратного покриття необхідно визначити величину радіусу оптимального покриття

$$\widehat{R}\left(\tau_*^N\right)=\inf_{\tau^N}\sup_{x\in\Omega}\min_{i=1,...,N}c\left(x,\tau_i\right)$$

і вектор $\tau_*^N=(\tau_1^*,...,\tau_N^*)$, на яких досягається значення $\widehat{R}\left(\tau_*^N\right)$ за умови виконання для кожної точки $x\in\Omega$ включення (5).

Задача про пошук радіуса *N* куль, що створюють *k*–кратне *c*-кульове покриття множини, може бути формалізована математично іншим способом.

Нехай Ω – обмежена замкнена множина з простору E_2, $\tau^N=(\tau_1,\ldots,\tau_N)$ – заданий на множині Ω (або в просторі E_2) набір центрів. Точки $\tau_{i_1},\tau_{i_2},...,\tau_{i_k}$ є ***k***-найближчими сусідами точки $x\in\Omega$ із заданих *N* точок, якщо

$$\forall j=\overline{1,k}\ \ c\left(x,\tau_{i_j}\right)<c\left(x,\tau_m\right),\ \ m\in\{1,2,...,N\}\setminus\{i_1,i_2,...,i_k\}.$$

В окремих випадках для деяких точок $x\in\Omega$ знак вищезазначеної нерівності може бути нестрогим. Тоді вважається, що точка $x\in\Omega$ має декілька різних наборів з *k* найближчих сусідів, а під час чисельної реалізації алгоритмів їх пошуку для однозначності припускається, що набір *k* найближчих сусідів утворюють точки $\tau_{i_1},\tau_{i_2},...,\tau_{i_k}$, які задовольняють наступній системі нерівностей

$$\forall j=\overline{1,k}\ \ c\left(x,\tau_{i_j}\right)\le c\left(x,\tau_m\right),\ \ m\in\{1,2,...,N\}\setminus\{i_1,i_2,...,i_k\}$$

і мають найменші можливі індекси.

Введемо до розгляду множину Λ_N^k *N*-вимірних векторів, координати яких можуть приймати значення 0 або 1, причому у кожному такому векторі число одиниць дорівнює k:

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = \left(\lambda_1,...,\lambda_N\right) : \lambda_i = 0 \vee 1,\, i = \overline{1,N};\, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = k \right\}.$$

Вочевидь, $\left|\Lambda_N^k\right| = C_N^k$.

Тоді для кожної точки $x \in \Omega$ k найближчих сусідів з фіксованого набору точок $\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$ можна знайти, розв'язуючи задачу пошуку такого вектору $\lambda(x) = \left(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)\right) \in \Lambda$, за якого досягається мінімальне значення наступної величини:

$$C(x) = \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i\right)\lambda_i(x). \tag{6}$$

Для кожної точки $x \in \Omega$ компонента $\lambda_i(x)$ цієї вектор-функції дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли центр τ_i є одним з k можливих її «сусідів». Вектор $\lambda(x)$, на якому досягається величина $C(x)$, визначає ***k*** найближчих до точки x центрів, а $C(x)$ є радіусом куль з центрами $\tau_{i_1}, \tau_{i_2},...,\tau_{i_k}$, які ***k***-кратно покривають точку x (індекси цих центрів і одиничних компонент вектору $\lambda(x)$ збігаються).

Задача про пошук радіуса N кругів, які створюють k–кратне ***c***-кульове покриття множини полягає у пошуку величини

$$\overline{R} = \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i\right)\lambda_i(x).$$

Задача про мінімальне k–кратне c-кульове покриття записується у такий спосіб: знайти величину

$$\overline{R}\left(\lambda^*(\cdot),\tau_*^N\right) = \inf_{(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i\right)\lambda_i(x), \tag{7}$$

де $\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = \left(\lambda_1,...,\lambda_N\right) : \lambda_i = 0 \vee 1,\, i = \overline{1,N};\, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = k \right\}$,

а також вектор-функцію $\lambda^*(\cdot) : \forall x \in \Omega\ \ \lambda^*(x) \in \Lambda_N^k$, та вектор $\tau_*^N = \left(\tau_1^*,...,\tau_N^*\right) \in \Omega^N \subset E_2^N$, за яких у виразі (7) досягається нижня грань.

Відтак, вектор-функція $\lambda(\cdot)$ використовується для конструктивного запису математичної моделі задачі та є проміжним результатом, містить інформацію про те, які саме ***k*** центрів є найближчими до кожної точки з Ω.

Наведемо опис методу розв'язання задачі про багатократне кульове покриття обмеженої множини і формули, які визначають субградієнт негладкої цільової функції (7).

Позаяк для компактної множини Ω з E_2 і неперервної функції ***c***-оптимальне ***k***–кратне покриття множини Ω заданим N числом ***c***-куль однакового радіуса існує, задачу (7) можна записати у наступному вигляді:

$$\widehat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right) \to \min_{(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N}, \tag{8}$$

де

$$\widehat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right) = \max_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i\right)\lambda_i(x).$$

В роботі [11] наведені деякі властивості функції $\widehat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$ з евклідовою метрикою $c\left(x,\tau_i\right) = \left\|x-\tau_i\right\|_2$, зокрема, неперервність, ліпшицієвість, неопуклість, майже всюди диференційовність, багатоекстремальність. Крім того, для непустої компактної множини Ω з E_2 і $\tau^N = \left(\tau_1,\ldots,\tau_N\right)$ з Ω^N справедливою є наступна рівність:

$$\widehat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right) = \max_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i\right)\lambda_i(x) =$$

$$= \max_{m=\overline{1,M}} \max_{x\in\Omega_m} \max_{i\in T_m} c\left(x,\tau_i\right),$$

де множини $\Omega_m, m = \overline{1,M}$, $M \le C_N^k$, складають ***k***-кратну діаграму Вороного для множини Ω, тобто таке розбиття множини Ω на підмножини $\Omega_1,...,\Omega_M$, що:

$$\bigcup_{i=1}^{M} \Omega_i = \Omega;\ \ mes\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0,\ \forall i \ne j,\ i,j = \overline{1,M};$$

$$\Omega_m = \left\{x \in \Omega : \forall j \in T_m\ \ c\left(x,\tau_j\right) < c\left(x,\tau_i\right),\ \ i \in \{1, 2, ..., N\} \setminus T_m\right\},$$

де $T_m = \left\{i_1^m, i_2^m,...,i_k^m\right\}$, $m = \overline{1,M}$ – всі можливі ***k***-елементні підмножини множини індексів $\{1, 2, ..., N\}$.

Враховуючи відповідність набору ***k*** центрів з індексами $i_1^m, i_2^m,...,i_k^m$ множині Ω_m, для останньої надалі будемо використовувати таке позначення: $\Omega\left(\overset{-}{\tau}{}^{T_m}\right)$, де $\overset{-}{\tau}{}^{T_m} = \left\{\tau_{i_1^m}, \tau_{i_2^m},...,\tau_{i_k^m}\right\}$. Відтак, Ω_m містить точки множини Ω, для яких центри з індексами із набору $T_m = \left\{i_1^m, i_2^m,...,i_k^m\right\}$ є ***k***-найближчими сусідами.

Чисельні алгоритми розв'язання задачі (8), наведені нижче, реалізують метод проєкції узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів. При цьому j-ю компоненту N-вимірного вектору узагальненого градієнта

$$g_{\widehat{R}}\left(\tau^N\right) = \left(g^{\tau_1}\left(\tau^N\right),\ldots,\ g^{\tau_j}\left(\tau^N\right),\ldots,g^{\tau_N}\left(\tau^N\right)\right) \tag{9}$$

функції $\widehat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$ в точці $\tau^N = \left(\tau_1,\ldots,\tau_N\right)$ можна обчислювати двома способами:

1) з використанням чисельного диференціювання:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = (g_1^{\tau_j}(\tau^N), g_2^{\tau_j}(\tau^N),...,g_n^{\tau_j}(\tau^N)), \tag{10}$$

де s-та компонента обчислюється наближено за формулою:

$$g_s^{\tau_j}(\tau^N) = \frac{\widehat{R}(\tau_1,...,(\tau_j^{(1)},...,\tau_j^{(s)}+\Delta,...,\tau_j^{(n)}),...,\tau_N) - \widehat{R}(\tau_1,...,(\tau_j^{(1)},...,\tau_j^{(s)},...,\tau_j^{(n)}),...,\tau_N)}{\Delta},$$

$$s = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,N};$$

Δ – деякий приріст компоненти вектора τ, параметр методу;

2) за допомогою ***k***-кратної діаграми Вороного. Позначимо через V фіксоване розбиття непустої компактної множини Ω на $\overline{M} \le C_N^k$ підмножин $V_1,...,V_m,...,V_{\overline{M}}$, котрі складають ***k***-кратну діаграму Вороного для Ω, причому всі V_i – непорожні, компактні. Введемо також для кожного $i = 1,...,N$ функції

$$R_i\left(\tau^N\right) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V\left(\bar{\tau}^{T_m}\right)} c\left(x, \tau_i\right). \qquad (11)$$

Субградієнтну множину $G_{R_i^V}\left(\hat{\tau}^N\right)$ функції (11) в точці $\hat{\tau}^N$ обчислюватимо за формулою

$$G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N) = \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{x \in I(\hat{\tau}^N)} G_{c(x,\tau_i)}(\hat{\tau}^N), \qquad (12)$$

де $I\left(\hat{\tau}^N\right) = \left\{ x : x \in \bigcup_{m: i \in T_m} V_m; c\left(x, \hat{\tau}_i\right) = R_i\left(\hat{\tau}^N\right) \right\}$;

$G_{c(x,\tau_i)}\left(\hat{\tau}^N\right)$ – субдиференціал функції $c\left(x, \tau_i\right)$ за τ_i на E_2 при фіксованому $x \in V_i$.

Узагальнений градієнт цільової функції задачі (8) має наступний вигляд:

$$g_{\hat{R}}\left(\tau^N\right) = \left(g_{R_1}^{\tau_1}\left(\tau^N\right),...,g_{R_i}^{\tau_i}\left(\tau^N\right),...,g_{R_N}^{\tau_N}\left(\tau^N\right)\right), \quad (13)$$

i-та компонента якого є елементом субградієнтної множини функції $R_i\left(\tau^N\right)$, $i = \overline{1,N}$, з (11) в точці τ_i, що записується так:

$$G_{R_i^V}^{\tau_i}\left(\tau^N\right) = \overline{co}\left\{ g_c^{\tau_i}\left(\bar{x}, \tau^N\right), \bar{x} : c\left(\bar{x}, \tau_i\right) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V\left(\bar{\tau}^{T_m}\right)} c\left(x, \tau_i\right) \right\},$$

$$i = \overline{1,N}.$$

Тут $g_c^{\tau_i}\left(\bar{x}, \tau^N\right)$ – узагальнений градієнт функції $c\left(x, \tau_i\right)$ в точці $\tau^N = \left(\tau_1,...,\tau_i,...,\tau_N\right)$, $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}\right)$; T_m – m -та підмножина фіксованого ***k***-кратного розбиття множини Ω. Однак, якщо розбиття множини Ω на підмножини не є фіксованим, і не є відомим розташування точок $\tau_1,...,\tau_N$, які генерирують оптимальне покриття множини Ω, тобто відповідне ***k***-кратне розбиття Вороного, то функція $\hat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$ задачі (8) не є опуклою на Ω^N внаслідок неопуклості за τ^N функції $\hat{r}\left(x, \tau^N\right) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i = \overline{1,N}} c\left(x, \tau_i\right) \lambda_i\left(x\right)$ на Ω^N.

Хоча функція $\hat{r}\left(x, \tau^N\right)$ не є опуклою за τ^N за будь-якого фіксованого $x \in \Omega$, вона складається з опуклих частин, які відповідають мінімумам функції $\hat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$, тому її **квазіградієнт** збігається із субградієнтом на одній з опуклих ділянок, котра примикає до даної точки. В роботі [11] наведено умови, за яких існує монотонно спадна послідовність значень функції $\hat{R}\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$.

Представимо наближений алгоритм розв'язання задачі про пошук радіуса *N* куль, що утворюють ***k***–кратне ***c***-кульове покриття множини $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, а також алгоритм розв'язання задачі про мінімальне ***k***–кратне ***c***-кульове покриття з розміщенням центрів куль. В алгоритмі вектор τ^N позначатимемо *τ*.

Запропоновано два підходи.

Перший підхід реалізує математичну модель задачі, сформульовану наступним чином: нехай $\bar{I}$ – множина всіх комбінацій з *N* елементів по *k* елементів, тобто множина всіх можливих індексів *k* центрів, зони спостереження яких можуть водночас покривати будь-яку точку множини Ω. Позначимо I_m – елемент множини $\bar{I}$. Очевидно, $\left|\bar{I}\right| = C_N^k$. Потрібно знайти величину

$$R = \max_{x \in \Omega} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c\left(x, \tau_i\right). \qquad (14)$$

Для реалізації (14) Ω покривається прямокутною сіткою. Якщо $\tilde{\Omega}$ – множина всіх вузлів сітки, то наближене значення шуканого радіусу обчислюється за наступною формулою: $\tilde{R} = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c\left(x, \tau_i\right)$.

Другий підхід розроблений з використанням алгоритмів сортування масиву відстаней від фіксованою точки $x \in \Omega$ до заданих центрів $\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$ і реалізується за допомогою наступного алгоритму.

Алгоритм 1

Ініціалізація. Ω покриваємо прямокутною сіткою з кроками $\Delta_j, j=1,2$; нехай $\bar{\Omega}$ – множина вузлів сітки. Задаємо розташування центрів $(\tau_1,...,\tau_N)$.

Крок 1. Для кожної точки *x* сітки $\bar{\Omega}$ будуємо масив відстаней до заданих центрів: $D\left(x\right) = \left(c\left(x, \tau_1\right),\ c\left(x, \tau_2\right),\ \ldots,\ c\left(x, \tau_N\right)\right)$.

Крок 2. Сортуємо $D\left(x\right)$ за зростанням елементів для *x* з $\bar{\Omega}$.

Крок 3. У відсортованому масиві вибираємо елемент, який стоїть на *k*-му місці (з порядковим номером *k*), позначимо цей елемент $c^k\left(x, \tau_{i_k}\right)$.

Крок 4. Серед усіх відібраних елементів знаходимо найбільший:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \bar{\Omega}} c^k\left(x, \tau_{i_k}\right).$$

Отримане максимальне значення є наближеним значенням радіусу кіл з центрами в точках $\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$, які ***k***–кратно покривають множину $\bar{\Omega}$.

На однакових просторових сітках чисельні алгоритми, засновані на цих підходах, показують однакові результати. Але час роботи алгоритму **1** значно менший, про що свідчить інформація, наведена в табл. 1. Тут зазначений час розв'язання задачі пошуку радіусу *N* куль, які складають ***k***–кратне ***c***-кульове покриття одиничного квадрата $\Omega=[0,1]\times[0,1]$, коли $\Delta_j = 0.005, j = 1,2$.

Опишемо можливі варіанти чисельних алгоритмів розв'язання задачі (8) у припущенні, що множина, яка покривається, має просту структуру. За основу обрано r-алгоритм Шора розв'язування задачі недиференційованої оптимізації.

У першому варіанті для обчислення компонент субградієнта використовуються формули чисельного диференціювання (10). Другий варіант включає етап побудови ***k***–кратної діаграми Вороного та обчислення вектору узагальненого градієнта цільової функції задачі (8) за формулами (13).

Алгоритм 2

Ініціалізація. Ω покриваємо прямокутною сіткою з кроками $\Delta_j, j=1,2$; нехай $\tilde{\Omega}$ – множина вузлів прямокутної сітки на множині Ω. Задаємо крок чисельного диференціювання Δ, початкове наближення $\tau^{(0)} = \left(\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)}\right)$.

Обчислюємо величину

$$\hat{R}\left(\tau^{(0)}\right) = \max_{x\in\tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=1,N} c\left(x,\tau_i^{(0)}\right)\lambda_i(x),$$

застосовуючи алгоритм **1**.

За формулами (10) обчислюємо вектор-градієнт $g_{\hat{R}}(\tau)$ в точці $\tau^{(0)}$, вибираємо початковий крок r-алгоритму $h_0 > 0$.

Перший крок алгоритму проводимо за формулою

$$\tau^{(1)} = \mathrm{P}_\Omega\left(\tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}\left(\tau^{(0)}\right)\right),$$

P_Ω – оператор проєктування на множині Ω.

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після *m, m* = 1, 2,…, кроків алгоритму отримано певний вектор $\tau^{(m)} = \left(\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}\right)$.

(m+1)-й крок алгоритму.

1. Обчислюємо за відомими центрами $\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}$ за допомогою алгоритму **1** величину $\hat{R}\left(\tau^{(m)}\right) = \max_{x\in\tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=1,N} c\left(x,\tau_i^{(m)}\right)\lambda_i(x)$.

2. Обчислюємо $g_{\hat{R}}(\tau)$ за формулами (10) при $\tau = \tau^{(m)}$.

3. Проводимо (*m*+1)-й крок r-алгоритму, ітераційна формула якого має вигляд

$$\tau^{(m)} = \mathrm{P}_\Omega\left(\tau^{(m)} - h_m \frac{\mathrm{H}_{m+1} g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{H}_{m+1} g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right), g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right)\right)}}\right), \quad (15)$$

де H_{m+1} – матриця розтягнення простору з коефіцієнтом α в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів, яка перераховується наступним чином:

$$\mathrm{H}_{m+1} = \mathrm{H}_m + (1/\alpha_2-1)\frac{\mathrm{H}_m \xi_m \xi_m^T \mathrm{H}_k}{(\mathrm{H}_m \xi_m, \xi_m)},$$

$$\xi_m = g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right) - g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m-1)}\right). \quad (16)$$

Якщо внаслідок округлень розрахунків H_{m+1} втрачає властивість додатної визначеності, замінюємо її одиничною матрицею.

Крок h_m вибираємо з умови:

$$\min_{h>0} \hat{R}\left(\tau^{(m)} - h \frac{\mathrm{H}_{m+1} g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{H}_{m+1} g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right), g_{\hat{R}}\left(\tau^{(m)}\right)\right)}}\right). \quad (17)$$

4. Якщо умова

$$\left\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (18)$$

не виконується, то переходимо до (*m*+2)-го кроку, інакше – перехід до п. 5.

5. Вважаємо $\tau_* = \tau^{(l)}$, де *l* – номер ітерації, на якій виконується умова (18) завершення роботи алгоритму.

6. Обчислюємо значення мінімального радіусу покриття за формулою

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x\in\tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=1,N} c(x,\tau_{*i})\lambda_i(x)$$

за допомогою алгоритму **1**.

Алгоритм 2 описаний.

Алгоритм 3

Ініціалізація. Ω покриваємо прямокутною сіткою з кроком $\Delta_j, j=1,2$. Нехай $\tilde{\Omega}$ – множина вузлів прямокутної сітки на множині Ω. Задаємо початкове розташування центрів покриття $\tau^{(0)} = \left(\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)}\right)$.

Таблиця 1

Час роботи алгоритмів при заданих кількості центрів N і кратності покриття k

Вхідні дані		Час роботи алгоритму (мс), який реалізує	
N	*k*	Перший підхід	Другий підхід
4	2	2,2784	0,1822
9	2	6,3777	0,3108
25	3	276,2283	0,7917

Обчислюємо величину $R\left(\tau^{(0)}\right) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i^{(0)}\right)\lambda_i\left(x\right)$ за допомогою алгоритму **1**. При цьому для кожного $i=1,...,N$ обчислюємо

$$R_i\left(\tau^{(0)}\right) = \max_{T_m:i\in T_m} \max_{x\in V\left(\bar{\tau}^{T_m}\right)} c\left(x,\tau_i^{(0)}\right).$$

За формулою (12) будуємо субградієнтну множину $G_{R_i^V}^{\tau_i}\left(\tau^{(0)}\right) = \overline{co}\left\{g_c^{\tau_i}\left(\bar{x},\tau^{(0)}\right), \bar{x} : c\left(\bar{x},\tau_i\right) = R_i\left(\tau_i^{(0)}\right)\right.$, де $g_c^{\tau_i}\left(\bar{x},\tau^{(0)}\right)$ – узагальнений градієнт функції $c\left(x,\tau_i\right)$ в точці $\tau^{(0)}$. Вибираємо вектор $g_{\hat{R}}\left(\tau^{(0)}\right) \in G_{R_i^V}^{\tau_i}\left(\tau^{(0)}\right)$.

Задаємо початковий пробний крок r-алгоритму $h_0 > 0$.

Перший крок алгоритму проводимо за формулою

$$\tau^{(1)} = \mathrm{P}_\Omega\left(\tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}\left(\tau^{(0)}\right)\right),$$

P_Ω – оператор проєктування на множину Ω.

Переходимо до другого кроку.

Нехай у результаті обчислень після *m, m* = 1, 2,…, кроків алгоритму отримано певний вектор $\tau^{(m)} = \left(\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}\right)$.

(m+1)-й крок алгоритму.

1. За центрами $\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}$ за допомогою алгоритму **1** обчислюємо

$$R\left(\tau^{(m)}\right) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_i^{(m)}\right)\lambda_i\left(x\right),$$

при цьому для кожного $i=1,...,N$ обчислюємо значення функції (11):

$$R_i\left(\tau^{(m)}\right) = \max_{T_m:i\in T_m} \max_{x\in V\left(\bar{\tau}^{T_m}\right)} c\left(x,\tau_i^{(m)}\right).$$

2. За формулою (12) будуємо субградієнтну множину в точці $\tau^{(m)}$.

3. Вибираємо вектор $g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) \in G_{R_i^V}^{\tau_i}\left(\tau^{(m)}\right)$.

4. Проводимо (*m*+1)-й крок r-алгоритму в H-формі за ітераційними формулами (15), (16). Крок h_m вибираємо з умови (17).

5. Якщо умова (18) не виконується, то переходимо до (*m*+2)-му кроку алгоритму, інакше – до п. 6.

6. Вважаємо $\tau_* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій виконалася умова (18) завершення роботи алгоритму.

7. За допомогою алгоритму **1** обчислюємо значення мінімального радіусу покриття $\hat{R}\left(\tau_*\right) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c\left(x,\tau_{*i}\right)\lambda_i\left(x\right)$.

Алгоритм **3** описаний.

Наведемо результати деяких обчислювальних експериментів з багатократного покриття одиничного квадрата з E_2 у випадку, коли функція $c\left(x,\tau_i\right)$ є евклідовою метрикою. На рис. 1 представлені результати двократного покриття одиничного квадрата 11-ма і 15-ма колами, отримані за допомогою алгоритмів **2** та **3**. На рис. 2 показані трикратні оптимальні покриття за різних *N*.

Результати наведених нижче та інших обчислювальних експериментів з чисельного розв'язання задачі (8) свідчать про багатоекстремальність її цільової функції. За різних початкових наближень набору центрів $\tau^{(0)} = \left(\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)}\right)$ можна отримати різні локальні розв'язки.

Практика розрахунків також свідчить про те, що найкращі результати багатократного покриття можна отримати, якщо спочатку на достатньо густій просторовій сітці знайти оптимальні розташування центрів за допомогою алгоритму **2**, а потім уточнити координати цих центрів за допомогою алгоритму **3**.

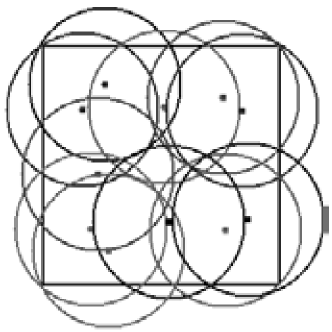
В дослідженні [12] наведено порівняльний аналіз результатів розв'язання багатьох тестових задач оптимального двократного покриття одиничного квадрата відомих в науковій літературі і отриманих за допомогою описаного вище алгоритму із застосуванням формул чисельного диференціювання, а також з використанням багатократних діаграм Вороного.

На рис. 3 наведено оптимальні триплексне і дуплексне розбиття множини $\Omega = \left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ з розміщенням *N*=17 і 15 центрів відповідно. Обчислений при цьому радіус покриття дорівнює: *R*=0.33232 і *R*=0.2961.

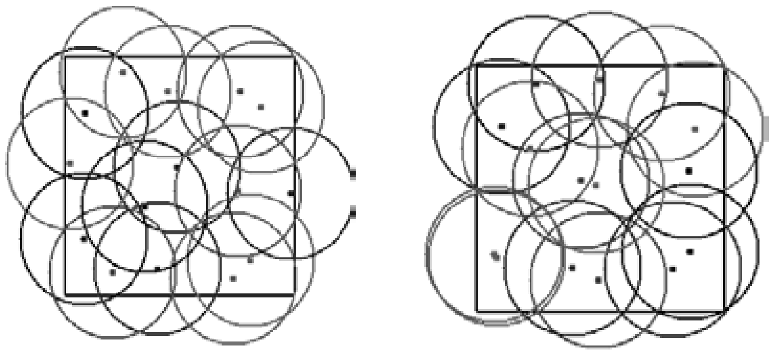
На рис. 4 ліворуч подано дуплексне розбиття квадрата з оптимально розташованими тринадцятьма центрами із зазначенням радіусу відповідного двократного покриття; праворуч представлено мінімальне двократне кульове покриття квадрату для 13 центрів [13]. Обчислений радіус двократного покриття для наведених прикладів дорівнює R=0.2961, R=0.2911 відповідно.

Якісний аналіз результатів обчислювальних експериментів дозволяє виявити переваги та недоліки алгоритмів. По-перше, наближені значення радіусу покриття і центрів, що його генерує, залежать від вихідних даних та параметрів алгоритму – початкового наближення координат центрів, величини кроку просторової сітки, кроку чисельного диференціювання при обчисленні компонент узагальненого градієнта.

В роботі [13] наведені постановки і методи розв'язання неперервних задач багатократного

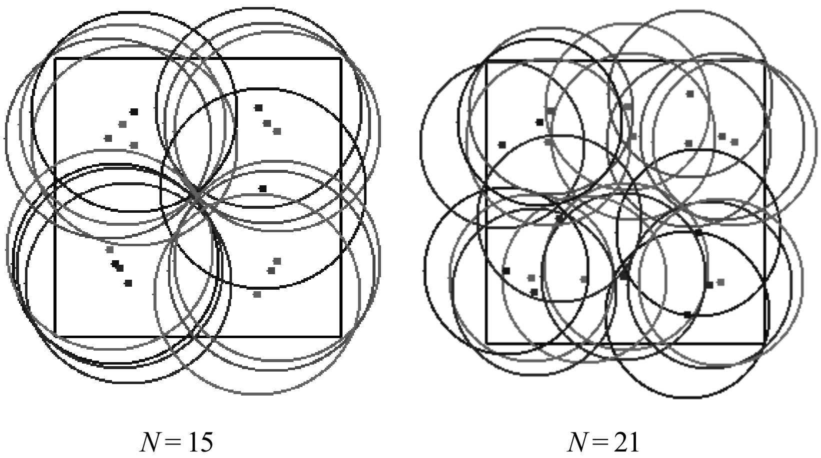


а) N=11



б) N=15

Рис. 1. Двократні оптимальні покриття одиничного квадрата, отримані із застосуванням: ліворуч – чисельного диференціювання; праворуч – двократної діаграми Вороного

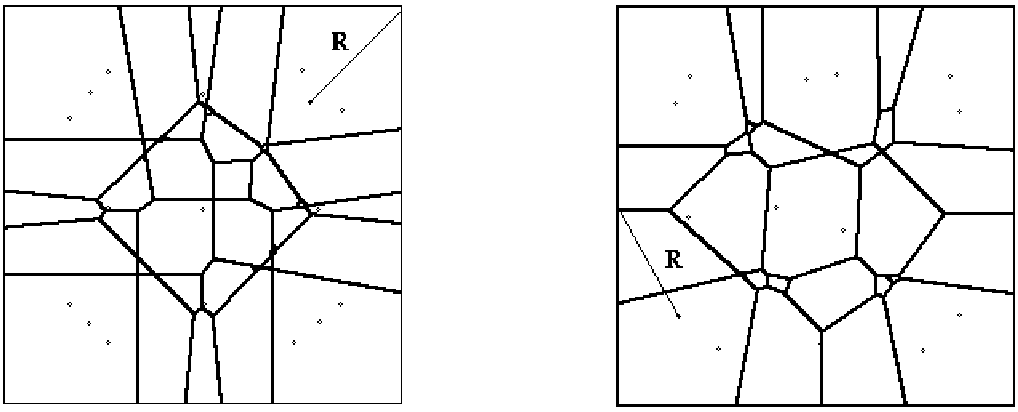


$N = 15$ $N = 21$

Рис. 2. Трикратне покриття одиничного квадрата, $||x|| = ||x||_2$

покриття з обмеженнями, які відповідають за таке розміщення центрів, при якому кожні два з них перебували б на відстані, не меншій за σ. Крім того, розглянуто випадки вимог, аби центри були розміщені в області якомога рівномірно, або жоден з них не потрапив в деяку заборонену зону. При цьому введення доданку у функціонал, котрий відповідає за неможливість «злипання» центрів куль, що утворюють покриття, називається регуляризацією задачі (функціоналу) про мінімальне k–кратне кульове покриття.

Висновки. Представлені математичні моделі задач оптимального розміщення ава-



$N = 17,\ k = 3$ $N = 15,\ k = 2$

Рис. 3. Оптимальне *k* -кратне розбиття квадрату з розміщенням *N* центрів і радіус відповідного мінімального покриття

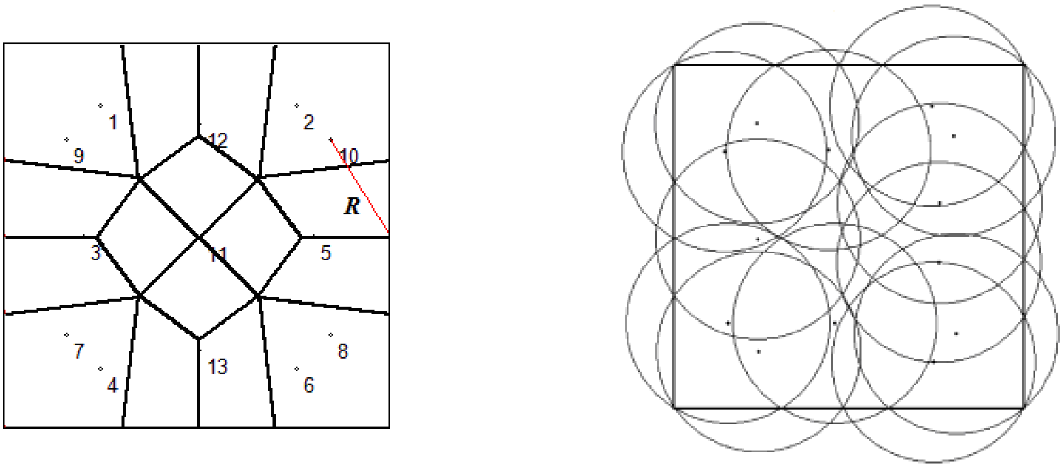


Рис. 4. Дуплексне розбиття *Ω* з оптимальним розміщенням 13 центрів і відповідне мінімальне покриття

рійно-рятувальних об'єктів з метою мінімізації часу надання допомоги навіть найвіддаленішому користувачу заданого регіону, які є неперервними задачами багатократного покриття обмеженої множини з простору E_2 ***c***-кулями найменшого радіусу за певних умов розміщення центрів, що утворюють покриття. Описано алгоритми розв'язання задачі багатократного кульового покриття, розроблені на основі субградієнтних методів негладкої оптимізації із залученням апарату штрафних функцій та елементів теорії неперервних задач оптимального розбиття множин.

Досліджено властивості розглянутих задач про багатократне оптимальне ***c***-кульове покриття множини Ω, встановлено їх зв'язок із задачами оптимального мультиплексного розбиття, що дозволяє в тих випадках, коли це доцільно, зводити розв'язання задачі про покриття до задачі розбиття. На прикладах розв'язання неперервних задач багатократного кульового покриття множин, а також задач пошуку розбиття відповідної кратності цих множин, продемонстрована можливість визначення радіусу покриття у процесі розв'язання неперервних лінійних задач мультиплексного розбиття множин. А для задачі мультиплексного розбиття множини з розміщенням центрів запропоновано критерій якості розбиття, який дозволяє отримувати таке розташування центрів, яке збігається з набором центрів куль мінімального радіусу, що багатократно покривають задану множину.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Dhamala T.N. A survey on models and algorithms for discrete evacuation planning network problems / T.N. Dhamala // Journal of industrial and management optimization, 2015. Vol. 11(1). P. 265–289. [Online]. URL: https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.265

2. Alghanmi N. A Survey of Location-Allocation of Points of Dispensing During Public Health Emergencies / N. Alghanmi, R. Alotaibi, S. Alshammari, A. Alhothali, O. Bamasag, K. Faisal // Front. Public Health, 2022. 10:811858. doi: 10.3389/fpubh.2022.811858

3. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. 2015. № 2 (119). P. 15 – 32.

4. Koriashkina L. The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets / L. Koriashkina, A. Cherevatenko, O. Mykhalova // Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). – Taylor & Francis Group, London. 2016. P. 233 – 239.

5. Антошкін О.А. Узагальнена математична модель задачі покриття області ідентичними колами та її основні реалізації / О.А. Антошкін, О.В. Панкратов // Системи обробки інформації. 2019. № 1(156). С. 44-49. DOI: 10.30748/soi.2019.156.06

6. Eliseu J. Araújo. A mathematical model for the coverage location problem with overlap control / Eliseu J. Araújo, Antônio A. Chaves, Luiz A.N. Lorena // Computers & Industrial Engineering. August 2020. Vol. 146. https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106548

7. Yakovlev S. Modeling and Simulation of Coverage Problem in Geometric Design Systems / S. Yakovlev, O. Kartashov, V. Komyak, S. Shekhovtsov, O. Sobol, I. Yakovleva // 2019 IEEE 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM), Polyana, Ukraine, 2019. P. 20-23. DOI: 10.1109/CADSM.2019.8779303

8. Лубенець Д.Є. Системний аналіз і оптимізація розподілу матеріальних ресурсів в ієрархічних транспортно-логістичних системах / Д.Є. Лубенець, Л.С. Коряшкіна // Молодь: наука та інновації: матеріали XI Міжнародної науково-технічної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених, Дніпро, 22–24 листопада 2023 року: у 2-х т. / Національний технічний університет «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2023. Том 2. С. 21 – 22.

9. Zhao R. Discrete-continuous model for facility location problem with capacity-cost relation constraints / R. Zhao, Y. Xiao, R. Luo, R. Yang, S. Zhou, S. Zhang // Computers & Industrial Engineering, November 2023. Vol. 185. https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109661

10. Dziuba, S., & Bulat, A., & Koriashkina, L., & Blyuss, B. Discrete-Continuous Model of the Optimal Location Problem for the Emergency Logistics System. URL: https://ssrn.com/abstract=4401341

11. Kiseleva E.M. Constructive algorithms for solution problems of multiple continuous coverage / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina, A.A. Mikhalova // System technologies. N 4(93). Dnipropetrovsk, 2014. P. 3 – 16.

12. Kiseleva E.M. Continuous problem of multiple ball covering with restrictions and the method of its solving / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina, A.A. Mikhalova // System technologies. N 1(96). Dnipropetrovsk, 2015. P. 165 – 179.

13. Коряшкіна Л.С. Застосування методів оптимального розбиття множин до неперервних задач багатократного покриття / Л.С. Коряшкіна, О.О. Михальова, В.І. Навоєнко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наук. праць. Дніпропетровськ, 2014. С. 141 – 154.

REFERENCES:

1. Dhamala T.N. (2015). A survey on models and algorithms for discrete evacuation planning network problems / T.N. Dhamala // Journal of industrial and management optimization. Vol. 11(1). P. 265–289. [Online]. Retrieved from https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.265

2. Alghanmi N. (2022). A Survey of Location-Allocation of Points of Dispensing During Public Health Emergencies / N. Alghanmi, R. Alotaibi, S. Alshammari, A. Alhothali, O. Bamasag, K. Faisal // Front. Public Health. 10:811858. doi: 10.3389/fpubh.2022.811858

3. Koriashkina L.S. (2015). Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. № 2 (119). P. 15 – 32.

4. Koriashkina L. (2016). The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets / L. Koriashkina, A. Cherevatenko, O. Mykhalova // Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). – Taylor & Francis Group, London. P. 233 – 239.

5. Antoshkin O.A. (2019). Uzahalnena matematychna model zadachi pokryttia oblasti identychnymy kolamy ta yii osnovni realizatsii [A generalized mathematical model of the problem of covering an area with identical circles and its main implementations] / O.A. Antoshkin, O.V. Pankratov // Systemy obrobky informatsii. № 1(156). S. 44-49. DOI: 10.30748/soi.2019.156.06

6. Eliseu J. Araújo. (2020). A mathematical model for the coverage location problem with overlap control / Eliseu J. Araújo, Antônio A. Chaves, Luiz A.N. Lorena // Computers & Industrial Engineering. August 2020. Vol. 146. https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106548

7. Yakovlev S. (2019). Modeling and Simulation of Coverage Problem in Geometric Design Systems / S. Yakovlev, O. Kartashov, V. Komyak, S. Shekhovtsov, O. Sobol, I. Yakovleva // 2019 IEEE 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM), Polyana, Ukraine. P. 20-23. DOI: 10.1109/CADSM.2019.8779303

8. Lubenets D.Ie. (2023). Systemnyi analiz i optymizatsiia rozpodilu materialnykh resursiv v iierarkhichnykh transportno-lohistychnykh systemakh [System analysis and optimization of the distribution of material resources in hierarchical transport and logistics systems] / D.Ie. Lubenets, L.S. Koriashkina // Molod: nauka ta innovatsii: materialy KhI Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii studentiv, aspirantiv ta molodykh vchenykh, Dnipro, 22–24 lystopada 2023 roku: u 2-kh t. / Natsionalnyi tekhnichnyi universytet «Dniprovska politekhnika». Dnipro : NTU «DP». Tom 2. S. 21 – 22.

9. Zhao R. (2023). Discrete-continuous model for facility location problem with capacity-cost relation constraints / R. Zhao, Y. Xiao, R. Luo, R. Yang, S. Zhou, S. Zhang // Computers & Industrial Engineering, November 2023. Vol. 185. https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109661

10. Dziuba, S., & Bulat, A., & Koriashkina, L., & Blyuss, B. Discrete-Continuous Model of the Optimal Location Problem for the Emergency Logistics System. Retrieved from https://ssrn.com/abstract=4401341

11. Kiseleva E.M. (2014). Constructive algorithms for solution problems of multiple continuous coverage / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina, A.A. Mikhalova // System technologies. N 4(93). Dnipropetrovsk. P. 3 – 16.

12. Kiseleva E.M. (2015). Continuous problem of multiple ball covering with restrictions and the method of its solving / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina, A.A. Mikhalova // System technologies. N 1(96). Dnipropetrovsk. P. 165 – 179.

13. Koriashkina L.S. (2014). Zastosuvannia metodiv optymalnoho rozbyttia mnozhyn do neperervnykh zadach bahatokratnoho pokryttia [Application of methods of optimal partitioning of sets to continuous problems of multiple coverage] / L.S. Koriashkina, O.O. Mykhalova, V.I. Navoienko // Pytannia prykladnoi matematyky i matematychnoho modeliuvannia. Zbirnyk nauk. prats. Dnipropetrovsk. S. 141 – 154.