УДК 517.958:519.63
DOI https://doi.org/10.32782/IT/2022-1-1

Михайло БЕРДНИК
доктор технічних наук, доцент, професор кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна, 49005, MGB2006@ukr.net
***ORCID:** 0000-0003-4894-8995,*
***Scopus Author ID**: 57196469717*

Ірина УДОВИК
кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна, 49005, udovik.im@gmail.com
***ORCID:** 0000-0002-5190-841X*
***Scopus Author ID**: 55998874400*

Олексій АЛЕКСЄЄВ
кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна, 49005, aleksey.alekseev@gmail.com
***ORCID:** 0000-0003-4793-6669,*

Наталія КАРЕВІНА
кандидат історичних наук, старший науковий співробітник, Інститут проблем математичних машин і систем Національної академії наук України, просп. Академіка Глушкова, 42, Київ, Україна, 03187, Natka_Kn@ukr.net
***ORCID:** 0000-0002-3291-8946*

Бібліографічний опис статті: Бердник М., Удовик І., Алексєєв О., Каревіна Н. (2022). Комп'ютерне моделювання узагальненої задачі Неймана теплообміну обтічників для ракет. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 1, 3–8, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2022-1-1

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ОБТІЧНИКІВ ДЛЯ РАКЕТ

До вибору теплового захисту обтічника ракет підходять з особливою ретельністю, адже обтічник повинен захищати від аеродинамічного нагріву, від випромінювання, від перепадів температури. Течії з великими числами Маха супроводжуються газодинамічними та фізико-хімічними ефектами. При обтіканні затупленого тіла утворюється ударна хвиля, яка відходить від тіла, залишаючись в околиці лобової точки практично еквідистантній його поверхні. Фізико-хімічні ефекти обумовлені зростанням температури,спричиненені гальмуванням газу за ударною хвилею. При цьому відбувається перехід кінетичної енергії потоку, що набігає в теплову, збуджуються коливальні ступеня свобод молеул газу, починається його дисоціація і навіть іонізація. Ось чому до числа проблем, що представляє великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурних полів, що виникають в обтічників для ракет, що мають форму зрізаного конуса, якій обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. В статті вперше побудована математична модель розрахунку температурних полів для зрізаного конуса, яка наближено моделює розподіл температурних полів, які виникають в обтічниках для ракет, з урахуванням кутової швидкості обертання та кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. В роботі побудоване нове інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду. Знайдений розв'язок може знайти застосування для комп'ютерного моделювання можливої величини термомеханічних напруг, сприяти правильному вибору технологічних параметрів, об'єктивного контролю, дозволяє намітити шляхи вдосконалення теплового захисту обтічників для ракет.

***Ключові слова:** комплексний ряд Фур'є, крайова задача Неймана, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації.*

Mykhailo BERDNYK
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of Computer Systems Software, Dnipro University of Technology, 19 Dmytra Yavornytskoho Avenue, Dnipro, Ukraine, 49005, MGB2006@ukr.net
***ORCID:** 0000-0003-4894-8995*
***Scopus Author ID**: 57196469717*

Iryna UDOVYK
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department of Software Engineering, Dnipro University of Technology, 19 Dmytra Yavornytskoho Avenue, Dnipro, Ukraine, 49005, udovik.im@gmail.com
***ORCID:** 0000-0002-5190-841X*
***Scopus Author ID:** 55998874400*

Oleksii ALEKSIEIEV
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, 19 Dmytra Yavornytskoho Avenue, Dnipro, Ukraine, 49005, aleksey.alekseev@gmail.com
***ORCID:** 0000-0003-4793-6669*

Natalia KAREVINA
PhD in History, Senior Researcher, Institute of Mathematical Machines and Systems Problems of the Ukraine National Academy of Science, 42 Academician Glushkov Avenue, Kyiv 03187, Ukraine, Natka_Kn@ukr.net
***ORCID:** 0000-0002-3291-8946*

To cite this article: Berdnyk, M., Udovyk, I., Aleksieiev, O., Karevina, N. (2022). Kompiuterne modeliuvannia uzahalnenoi zadachi Neimana teploobminu obtichnykiv dlia raket [Computer modeling of the generalized Neyman problem of heat exchange of rocket fairing]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 1, 3–8, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2022-1-1

COMPUTER MODELING OF THE GENERALIZED NEYMAN PROBLEM OF HEAT EXCHANGE OF ROCKET FAIRING

The choice of thermal protection of the rocket fairing is made with special care because the fairing must protect against aerodynamic heating, radiation, and temperature changes. Currents with large Mach numbers are accompanied by gas-dynamic and physicochemical effects. When flowing around the blunt body, there is formed a shock wave which departs from the body but remains in close vicinity to the frontal point almost equidistant to its surface. Physical and chemical effects are stipulated by rising temperatures caused by the inhibition of gas by the shock wave. At the same time, there occur a transition of the kinetic energy of the rushing flow into the thermal one, excitement of fluctuating degrees of gas molecules freedoms, dissociation and even ionization. Therefore, among the problems of great theoretical and practical interest, there is the problem of studying the temperature fields arising in the fairings for missiles in the form of a truncated cone that rotates around its axis, given the finiteness of the rate of heat propagation. For the first time, a mathematical model for calculating temperature fields for a truncated cone is constructed in the article. The model approximates the distribution of temperature fields that appear in rocket fairings, taking into account the angular velocity and the finite velocity of heat propagation in the form of a boundary value problem of mathematical physics for the hyperbolic equation of thermal conductivity with Neumann boundary conditions. In the paper, there is formed a new integral transformation for a two-dimensional finite space in the application of which there is found the temperature field in the form of a convergent series. The solution found can be used for computer simulation of the possible value of thermomechanical stresses, promotion of the correct choice of technological parameters, objective control, as well as for identification of the ways to improve the thermal protection of fairings for missiles.

***Key words:** complex Fourier series, Neumann boundary value problem, Laplace integral transformation, relaxation time.*

Актуальність проблеми. На сьогоднішній день ціна обтічників для ракет близько 5-7 мільйонів доларів. Вага обтічника Falcon 9 з діаметром 5,2 метра близько 1,9 тонни. До вибору теплового захисту обтічника підходять з особливою ретельністю, адже обтічник повинен захищати від аеродинамічного нагріву, від випромінювання, від перепадів температури.

Наприклад, Falcon Heavy проходить звуковий бар'єр приблизно на висоті 10 км, і потім розганяється до 7-8 махів. На цих висотах повітря все ще досить щільне і відбувається сильний розігрів від аеродинамічного нагріву обтічника зі швидким охолодженням у верхніх шарах атмосфери (Чернобрывко, 2015; Аврамов, 2015). Течії з великими числами Маха супроводжуються газодинамічними та фізико-хімічними ефектами. При обтіканні затупленого тіла утворюється ударна хвиля, яка відходить від тіла, залишаючись в околиці лобової точки практично еквідистантній його поверхні. Фізико-хімічні ефекти обумовлені зростанням температури, спричиненені гальмуванням газу за ударною хвилею. При цьому відбувається перехід кінетичної енергії потоку, що набігає в теплову, збуджуються коливальні ступеня свобод молеул газу, починається його дисоціація і навіть іонізація. Крім того, при великих швидкостях, вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним.

Ось чому до числа проблем, що представляє великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурних полів, що виникають в обтічників для ракет, що мають форму зрізаного конуса, якій обертається навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла

Анализ останніх досліджень і публікацій. Аналіз праць (Чернобрывко, 2013; Чернобрывко, 2017; Чернобрывко, 2015; Бердник, 2005,) показав, що теплообмін в тілах обертання, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо. В (Бердник, 2005, 37-44) показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра, якій обертається, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання, а відомі моделі не дають змогу обчислювати температуру в обтічниках для ракет, з урахуванням кутової швидкості обертання та кінцевої швидкості поширення тепла.

Мета статті. Для моделювання температурного поля слід представити форму обтічників для ракет у вигляді зрізаного конуса, і зробити ряд розумних спрощень. Метою роботи є побудова нової математичної моделі розрахунку температурних полів для зрізаного конуса, яка наближено моделює температуру в обтічників для ракет, у вигляді крайової задачі математичної фізики а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження. Розглянемо розрахунок температурного поля зрізаного конуса у циліндричній системі координат (r,ϕ,z) висотою h з твірною лінією $r=\varsigma(z)=R+z\cdot tgA$ (рис. 1).

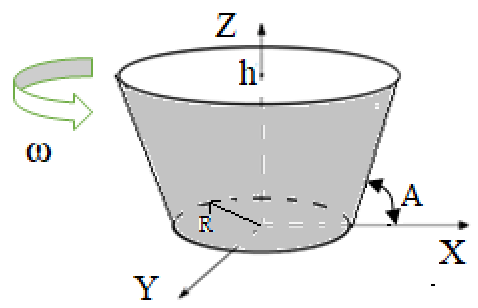

Рис. 1. Зрізаний конус з твірною лінією $r=\varsigma(z)$

У початковий момент часу температура конуса постійна G_0, а на бічній поверхні відоме значення теплового потока $V(\phi,z)$. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. На торцах відомі значення значення теплових потоків $G_1(r,\phi)$ і $G_2(r,\phi)$ при $z=0$ і $z=h$ відповідно. В (Бердник, 2005, 37-44) отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно (Бердник, 2005, 37-44) узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системи координат приймає вигляд:

$$\gamma\, c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial\phi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\phi\partial t}\right]\right\}= =\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{1}$$

де $\gamma-$ щільність середовища; $c-$ питома теплоємність; τ_r – час релаксції; $T(r,\phi,z,t)$ – температура середовища; λ – коефіцієнт теплопровідності; $t-$ час.

Математично задача визначення температурного поля конуса складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області $D=\{(r,\phi,z,t)\ |r\in(0,\varsigma(z)),\ \phi\in(0,2\pi),\ z\in(0,h),t\in(0,\infty)\ \}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\phi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\phi\partial t}= =a\cdot\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

з початковими умовами

$$\theta(r,\phi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(r,\phi,z,0)}{\partial t}=0 \qquad (3)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=\varsigma(z)} e^{\frac{x-t}{\tau_r}}dx=G(\phi,z) \qquad (4)$$

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0} e^{\frac{x-t}{\tau_r}}dx=\Theta(r,\phi)\quad \int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=h} e^{\frac{x-t}{\tau_r}}dx=\Lambda(r,\phi) \qquad (5)$$

де $\theta=\frac{T(r,\phi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла; $a=\frac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності; $G(\phi,z)=\frac{V(\phi,z)\ \tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $\Theta(r,\phi)=\frac{G_1(r,\phi)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $\Lambda(r,\phi)=\frac{G_2(r,\phi)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $G(\phi,z),\Theta(r,\phi),\Lambda(r,\phi)\in C(0,2\pi)$.

Тоді рішення крайової задачі (2)–(5) $\theta(r,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим за r,φ,z, один раз за t в області D і неперервним на $\overline{D}$ (Маркович, 2010,53), тобто $\theta(r,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\phi,z)$, $\Lambda(r,\phi)$, $\Theta(r,\phi)$, $\theta(r,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є:

$$\begin{Bmatrix}\theta(r,\phi,z,t)\\ G(\phi,z)\\ \Theta(r,\phi)\\ \Lambda(r,\phi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(r,z,t)\\ G_n(z)\\ \Theta_n(r)\\ \Lambda_n(r)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\phi), \qquad (6)$$

де $\begin{Bmatrix}\theta_n(r,z,t)\\ G_n(z)\\ \Theta_n(r)\\ \Lambda_n(r)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta(r,\phi,z,t)\\ G(\phi,z)\\ \Theta(r,\phi)\\ \Lambda(r,\phi)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\phi)d\phi$;

$G_n(z)=G_n^{(1)}(z)+i\cdot G_n^{(2)}(z)$;

$\theta_n(r,z,t)=\theta_n^{(1)}(r,z,t)+i\theta_n^{(2)}(r,z,t)$;

$\Theta_n(r)=\Theta_n^{(1)}(r)+i\cdot\Theta_n^{(2)}(r)$;

$\Lambda_n(r)=\Lambda_n^{(1)}(r)+i\cdot\Lambda_n^{(2)}(r)$; i- уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta(r,\phi,z,t)$ функція дійсна, надалі обмежимося розглядом $\theta_n(r,z,t)$ для n=0,1,2,…, тому що $\theta_n(r,z,t)$ і $\theta_{-n}(r,z,t)$ будуть комплексно спряженими (Маркович, 2010,53). Підставляючи значення функцій з (6) у (2) – (5), одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t}=\\ =a\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\theta_n^{(i)}+\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right]\end{gathered} \qquad (7)$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(r,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(r,z,0)}{\partial t}=0 \qquad (8)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=\varsigma(z)} e^{\frac{x-t}{\tau_r}}dx=G_n^{(i)}(z),$$

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}\right|_{z=0} e^{\frac{x-t}{\tau_r}}dx=\Theta_n^{(i)}(r),\quad \int_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}\right|_{z=1} e^{\frac{x-t}{\tau_r}}dx=\Lambda_n^{(i)}(r), \qquad (9)$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-\omega n$; $\vartheta_n^2=\omega n$; $m_1=2$, $m_2=1$; i =1,2.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) з умовами (8)-(9) інтегральне перетворення Лапласа (Маркович, 2010,71):

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty f(\tau)\ e^{-s\tau}\ d\tau.$$

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}s\tilde{\theta}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\theta}_n^{(m_i)}+\tau_r s\tilde{\theta}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde{\theta}_n^{(i)}=\\ =a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r}\right)-\frac{n^2}{r^2}\tilde{\theta}_n^{(i)}+\frac{\partial^2\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2}\right]\end{gathered} \qquad (10)$$

с граничними умовами

$$\left.\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=\varsigma(z)}=\tilde{G}_n^{(i)}(z),$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}\right|_{z=0}=\tilde{\Theta}_n^{(i)}(r),\quad \left.\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}\right|_{z=1}=\tilde{\Lambda}_n^{(i)}(r), \qquad (11)$$

де $\tilde{G}_n^{(i)}(z)=G_n^{(i)}(z)(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$;

$\Theta_n^{(i)}(r)=\Theta_n^{(i)}(r)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$;

$\tilde{\Lambda}_n^{(i)}(z)=\Lambda_n^{(i)}(z)(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$; i =1,2.

Для розв'язання крайової задачі (10)-(11) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k})=\iint_D Q(\mu_{n,k},r,z)\cdot r\cdot f(r,z)d\sigma \qquad (12)$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},r,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}Q+\mu_{n,k}\cdot Q+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}=0 \qquad (13)$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=\varsigma(z)}=0,\quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=1}=0, \qquad (14)$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},r,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ в (13)-(14) находяться по формулам, які приведені в (Berdnyk, 2018, 168-177), а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(\mu_{n,k},r,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},r,z)\right\|^2}\bar{f}(\mu_{n,k}). \qquad (13)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (10) із граничними умовами (11) інтегральне перетворення (12). У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\bar{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)} + \tau_r s\bar{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)} = q_{n,k}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu^2_{n,k}} - \bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}\right), \quad (14)$$

де

$$\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})} = \int_0^h \varsigma(z)\cdot Q\left(\mu_n, \varsigma(z), z\right)\tilde{G}_n^{(i)}dz +$$

$$+\oint_L r\left(Q\left(\mu_{n,k}, r, z\right)\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} - \tilde{\theta}_n^{(i)}\frac{\partial Q\left(\mu_{n,k}, r, z\right)}{\partial z}\right)dl;$$

$$q_{n,k} = \mathrm{a}\mu^2{}_{n,k}.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому додатно орієнтованому контуру (рис. 2).

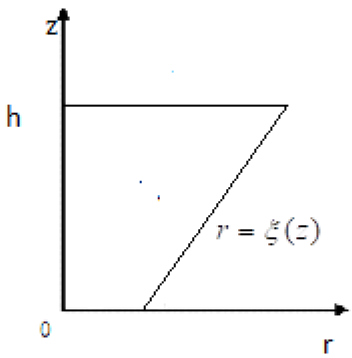

Рис. 2. Замкнутий контур із твірною $r = \varsigma(z)$

Розв'язавши систему рівнянь (14), одержуємо:

$$\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)} = a\cdot\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(i)}\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q_{n,k}}\right) + (-1)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}\left(1 + s\tau_r\right)}{\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q_{n,k}}\right)^2 + \omega^2 n^2\left(1 + s\tau_r\right)^2}. \quad (15)$$

Застосовуючи до зображення функцій (15) формули оберненого перетворення Лапласа (Лопушанська, 2014, 47) одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}\left(\mu_{n,k}, t\right) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) + \tau_r\omega n\mathrm{i}\right] + \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\left[\tau_r\omega n - \left(2\tau_r s_j + 1\right)\mathrm{i}\right]\right\}$$
$$\cdot\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) - \tau_r\omega n\mathrm{i}\right] + \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\left[\tau_r\omega n + \left(2\tau_r s_j + 1\right)\mathrm{i}\right]\right\}\cdot \quad (16)$$
$$\cdot\left(e^{s_j t} - 1\right),$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}\left(\mu_{n,k}, t\right) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) + \tau_r\omega n\mathrm{i}\right] - \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\left[\tau_r\omega n - \left(2\tau_r s_j + 1\right)\mathrm{i}\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) - \tau_r\omega n\mathrm{i}\right] - \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\left[\tau_r\omega n + \left(2\tau_r s_j + 1\right)\mathrm{i}\right]\right\} \quad (17)$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right),$$

де $\zeta_{n,k}\left(s_j\right) = \dfrac{0.5s_j^{-1}a}{\left(2\tau_r s_j + 1\right)^2 + \left(\tau_r\omega n\right)^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{\left(\tau_r\omega ni - 1\right) \pm \sqrt{\left(1 + \tau_r\omega ni\right)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},$$

$$s_{3,4} = \frac{\left(\tau_r\omega ni + 1\right) \pm \sqrt{\left(1 - \tau_r\omega ni\right)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (13) одержуємо температурне поле зрізаного конуса, якій обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, із урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(r, \phi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}\left(\mu_{n,k}, t\right) + \mathrm{i}\bar{\theta}_n^{(2)}\left(\mu_{n,k}, t\right)\right]\frac{Q\left(r, z, \mu_{n,k}\right)}{\left\|Q\left(r, z, \mu_{n,k}\right)\right\|^2}\right\}\exp(\mathrm{i}n\phi),$$

де $\bar{\theta}_n^{(1)}\left(\mu_{n,k}, t\right)$, $\bar{\theta}_n^{(2)}\left(\mu_{n,k}, t\right)$ визначаються за формулами (16), (17).

Висновки. Вперше побудована математична модель розрахунку температурних полів для зрізаного конуса, яка наближено моделює розподіл температурних полів, які виникають в обтічниках для ракет, з урахуванням кутової швидкості обертання та кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. В роботі побудоване нове інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду. Знайдений розв'язок може знайти застосування для прогнозування можливої величини термомеханічних напруг, сприяти правильному вибору технологічних параметрів, об'єктивного контролю, дозволяє намітити шляхи вдосконалення теплового захисту обтічників для ракет.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Чернобрывко М. В., Аврамов К.В., Батутина Т.Я., Дегтяренко П.Г., Тонконоженко А.М., Сулейменов У.С. Динамическая неустойчивость подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. *Технічна механіка.* 2015. № 1. С. 15–29.

2. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Батутина Т.Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. *Космічна наука і технологія.* 2015. Т. 21. № 1. С. 10–14.

3. Чернобрывко М.В., Аврамов К.В., Батутина Т.Я., Меша Ю.В. Аэроупругие колебания обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. *Вісник НТУ«ХПИ».* 2013. № 63 (1063). С. 131–139.

4. Чернобрывко М.В., Аврамов К.В., Дегтяренко П.Г., Тонконоженко А.М., Меша Ю.В., Тишковец Е.В., Жолос О.В. Динамика композитного корпуса твердотопливного двигателя ракеты под действием импульсных нагрузок, описывающих рабочие процессы в двигателе. *Космічна наука і технологія.* 2017. Т. 23. № 1(104). С. 18–29.

5. Чернобрывко М.В., Аврамов К.В., Клименко Д.В., Батутина Т.Я. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Тез. докл. V Международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее», г. Днепр, 2015. С. 31.

6. Бердник М.Г. Математичне моделювання температурного поля в циліндрі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. *Питання прикладної математики і математичного моделювання.* Дніпропетровськ: ДНУ, 2005. С. 37–44.

7. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. Львів: Львівська політехніка, 2010. 384 с.

8. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena.* Vol. 277. Trans Tech Publications, Switzerland. 2018. pp 168–177.

9. Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М’яус О.М. Перетворення Фур’є, Лапласа: узагальнення та застосування. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. 152 с.

REFERENCES:

1. Chernobryivko M. V., Avramov K.V., Batutina T.Ya., Degtyarenko P.G., Tonkonozhenko A.M., Suleymenov U.S. (2015). Dinamicheskaya neustoychivost podkreplennyih konicheskih obtekateley raket-nositeley v sverhzvukovom gazovom potoke [Dynamic instability of reinforced conical fairings of launch vehicles in a supersonic gas flow]. *Tehnichna mehanika– Technical mechanic,* 1, 15-29 [in Ukrainian].

2. Avramov K.V., Chernobryivko M.V., Batutina T.Ya., Degtyarenko P.G., Tonkonozhenko A.M. (2015). Dinamicheskaya neustoychivost obtekateley raket [Dynamic instability of rocket fairings]. *Kosmichna nauka I tehnologiya–Space science and technology,* 21 (Vols.), 1, pp. 10-14 [in Russian].

3. Chernobryivko M.V., Avramov K.V., Batutina T.Ya., Mesha Yu.V. (2013). Aero-uprugie kolebaniya obtekateley raket-nositeley v sverhzvukovom gazovom potoke [Aeroelastic oscillations of launch vehicle fairings in a supersonic gas flow]. *Visnik NTU«HPI»–Bulletin of NTU "KhPI",* № 63 (1063), pp. 131-139 [in Ukrainian].

4. Chernobryivko M.V., Avramov K.V., Degtyarenko P.G., Tonkonozhenko A.M., Mesha Yu.V., Tishkovets E.V., Zholos O.V. (2017). Dinamika kompozitnogo korpusa tverdotoplivnogo dvigatelya raketyi pod deystviem impulsnyih nagruzok, opisyivayuschih rabochie protsessyi v dvigatele [Dynamics of the composite body of a solid-propellant rocket engine under the action of impulse loads that describe the working processes in the engine]. *Kosmichna nauka i tehnologiya–Space science and technology,* 23, № 1(104), pp. 18-29 [in Russian].

5. Chernobryivko M.V., Avramov K.V., Klimenko D.V., Batutina T.Ya. (2015). Dinamicheskaya neustoychivost obtekateley raket-nositeley v sverhzvukovom gazovom potoke. Tez. dokl. V Mezhdunarodnoy konferentsii «Kosmicheskie tehnologii: nastoyaschee i buduschee» [Dynamic instability of launch vehicle fairings in a supersonic gas flow. Tez. report V International Conference "Space Technologies: Present and Future"], Dnepr, [in Russian].

6. Berdnik M.G. (2005). Matematichne modeljuvannja temperaturnogo polja v cilindri, jakij obertaєt'sja, z urahuvannjam kincevoї shvidkosti poshirennja tepla [Mathematical modeling of the temperature field in the cylinder, which turns out to be, with the improvement of the terminal stability of the expansion of heat]. *Pitannja prikladnoї matematiki i matematichnogo modeljuvannja–Nutrition for applied mathematics and mathematical modeling.* Dnipropetrovs'k: DNU, pp. 37-44 [in Ukrainian].

7. Markovich B.M. (2010). *Rivnjannja matematichnoї fiziki [Rivnyannia of Mathematical Physics].* L'viv: L'vivs'ka politehnika [in Ukrainian].

8. Lopushanska H.P., Lopushanskyi A.O., M’iaus O.M. (2014). Peretvorennja Furje, Laplasa: uzagalnennja ta zastosuvannja [The transformation of Four'e, Laplace: zagalnennya that zastosuvannya]. Lviv.: LNU im. Ivana Franka [in Ukrainian].

9. Berdnyk M. (2018). The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena,* Vol. 277 – Trans Tech Publications, Switzerland, pp 168-177 [in English].