UDC 004.94
DOI https://doi.org/10.32782/IT/2025-1-34

Vyacheslav GOREV
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Physics, Dnipro University of Technology, 19, Dmytra Yavornytskoho Ave., Dnipro, Ukraine, 49005, Gorev.V.M@nmu.one
ORCID: *0000-0002-9528-9497*
Scopus Author ID: *55047688400*

Yana SHEDLOVSKA
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Technology and Computer Engineering, Dnipro University of Technology, 19, Dmytra Yavornytskoho Ave., Dnipro, Ukraine, 49005, shedlovska.y.i@nmu.one
ORCID: *0000-0003-4931-4070*
Scopus Author ID: *57191853306*

Ivan LAKTIONOV
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of Computer Systems Software, Dnipro University of Technology, 19, Dmytra Yavornytskoho Ave., Dnipro, Ukraine, 49005, laktionov.i.s@nmu.one
ORCID: *0000-0001-7857-6382*
Scopus Author ID: *57194557735*

Grygorii DIACHENKO
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Electric Drive, Dnipro University of Technology, 19, Dmytra Yavornytskoho Ave., Dnipro, Ukraine, 49005, diachenko.g@nmu.one
ORCID: *0000-0001-9105-1951*
Scopus Author ID: *57201252081*

To cite this article: Gorev, V., Shedlovska, Ya., Laktionov, I., Diachenko, G. (2025). Prohnozuvannia Kolmohorova–Vinera MFSD protsesu, shcho bazuietsia na polinomakh Chebyshova druhoho rodu [Kolmogorov–Wiener prediction of MFSD process based on the Chebyshev polynomials of the second kind]. *Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 257–261, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2025-1-34

KOLMOGOROV– WIENER PREDICTION OF MFSD PROCESS BASED ON THE CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF THE SECOND KIND

As is known, the telecommunication traffic in systems with packet data transfer is considered to be a heavy-tail process. Moreover, as is known, heavy-tail models may describe processes in agriculture. So, the problem of heavy-tail process prediction is an urgent problem for several fields of knowledge. For example, the so-called MFSD model may describe traffic in some of the above-mentioned telecommunication systems. Recently we investigated prediction of the continuous heavy-tail MFSD process which is based on the Kolmogorov-Wiener filter, constructed on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind. The corresponding Wiener-Hopf integral equation was solved and the mean absolute percentage misalignment errors for the obtained approximate solutions were calculated for different packet rates. However a question may occur if another orthogonal function set may enhance the quality of the coincidence of the left-hand side and the right-hand side of the Wiener-Hopf integral equation. The corresponding search of another orthogonal function set may be started with the search of another polynomial set. So, in this paper the corresponding investigation is made on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind.

The aim of the work *is to investigate the continuous Kolmogorov-Wiener prediction of the heavy-tail MFSD process on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind and to compare the results with that obtained on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind.*

The methodology *consists in the solving of the Wiener-Hopf integral equation on the basis of the Galerkin method based on the Chebyshev polynomials of the second kind.*

The scientific novelty *consists in the use of the Chebyshev polynomials of the second kind as a basis of the Galerkin method for continuous Kolmogorov-Wiener prediction of the MFSD process.*

The conclusions *are as follows. The results both for the Chebyshev polynomials of the second kind and for the Chebyshev polynomials of the first kind are identical.*

Key words: *continuous Kolmogorov-Wiener filter, MFSD process, Chebyshev polynomials of the second kind.*

В'ячеслав ГОРЄВ
кандидат фізико–математичних наук, доцент, завідувач кафедри фізики, Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького 19, Дніпро, Україна, 49005
ORCID: *0000-0002-9528-9497*
Scopus Author ID: *55047688400*

Яна ШЕДЛОВСЬКА
кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького 19, Дніпро, Україна, 49005
ORCID: *0000-0003-4931-4070*
Scopus Author ID: *57191853306*

Іван ЛАКТІОНОВ
доктор технічних наук, доцент, професор кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем, Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького 19, Дніпро, Україна, 49005
ORCID: *0000-0001-7857-6382*
Scopus Author ID: *57194557735*

Григорій ДЯЧЕНКО
кандидат технічних наук, доцент кафедри електропривода, Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», просп. Дмитра Яворницького 19, Дніпро, Україна, 49005
ORCID: *0000-0001-9105-1951*
Scopus Author ID: *57201252081*

Бібліографічний опис статті: Горєв, В., Шедловська, Я., Лактіонов, І., Дяченко, Г. (2025). Прогнозування Колмогорова–Вінера MFSD процесу, що базується на поліномах Чебишова другого роду. *Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 257–267, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2025-1-34

ПРОГНОЗУВАННЯ КОЛМОГОРОВА–ВІНЕРА MFSD ПРОЦЕСУ, ЩО БАЗУЄТЬСЯ НА ПОЛІНОМАХ ЧЕБИШОВА ДРУГОГО РОДУ

Як відомо, телекомунікаційний трафік в системах з пакетною передачею даних розглядається як процес з важким хвостом. Більше того, як відомо, моделі з важким хвостом можуть описувати деякі процеси в сільському господарстві. Тож задача прогнозування процесів з важким хвостом є актуальною в низці галузей знань. Наприклад, так звана MFSD модель може описувати трафік в деяких телекомунікаційних системах з пакетною передачею даних. Нещодавно нами досліджено прогнозування неперервного MFSD процесу з важким хвостом, що базується на фільтрі Колмогорова–Вінера, який побудовано на основі поліномів Чебишова першого роду. Відповідне інтегральне рівняння Вінера–Хопра будо розв'язане, та середні абсолютні відсоткові помилки нев'язки лівої та правої частин інтегрального рівняння Вінера–Хопфа для отриманих наближених розв'язків було отримано для різних швидкостей передачі пакетів. Однак може виникнути запитання чи може інша ортогональна система функцій покращити якість співпадіння лівої та правої частин інтегрального рівняння Вінера–Хопфа. Відповідний пошук іншої ортогональної системи функцій може бути розпочато з пошуку іншої поліноміальної системи. Відповідно, в цій статті відповідне дослідження проведено на основі поліномів Чебишова другого роду.

Метою роботи є *дослідити неперервне прогнозування Колмогорова–Вінера для процесу MFSD з важким хвостом на основі поліномів Чебишова другого роду та порівняти результати з результатами, отриманими на основі поліномів Чебишова першого роду.*

Методологія *полягає в розв`язанні інтегрального рівняння Вінера–Хопфа на основі методу Галеркіна, що базується на поліномах Чебишова другого роду.*

Наукова новизна *полягає у використанні поліномів Чебишова другого роду як основу методу Галеркіна для прогнозування неперервного MFSD процесу на основі фільтра Колмогорова–Вінера.*

***Висновки** є такими. Результати, отримані на основі поліномів Чебишова другого роду, та на основі поліномів Чебишова першого роду є ідентичними.*

***Ключові слова:** неперервний фільтр Колмогорова–Вінера, MFSD процес, поліноми Чебишова другого роду.*

Introduction. The paper is devoted to the Kolmogorov–Wiener prediction of the MFSD process (Anderson et al, 2017) on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind. In (Anderson et al, 2017) it is stressed that the MFSD process may describe telecommunication traffic in systems with packet data transfer.

Recently we investigated the corresponding problem on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind (Gorev et al, 2024), but a question occurs whether another orthogonal function set may enhance the quality of coincidence of the left-hand side and the right-hand side of the Wiener-Hopf integral equation. So, we start the corresponding search from the polynomial system such as the Chebyshev polynomials of the second kind.

Wiener-Hopf integral equation and its solution. The Wiener-Hopf integral equation is as follows, see (Gorev et al, 2024):

$$\int_0^T h(\tau)R(t-\tau)d\tau = R(t+z), \tag{1}$$

where $h(\tau)$ is the unknown weight function, T is the time interval on which the observed data are given, z is the time interval on which the prediction is made and $R(t)$ is the process correlation function. The correlation function of the MFSD process under investigation is as follows (Anderson et al, 2017):

$$R(t) = \frac{e^{\xi(\alpha)\rho(t)}-1}{e^{\xi(\alpha)}-1}, \quad t \ge 1. \tag{2}$$

Where

$$\rho(t) = \left(1 - \frac{2^{-7.21}\alpha^{0.75}}{2^{-7.21}\alpha^{0.75}+1}\right)\frac{2(1-d)t^2-(1-d)^2}{t^2-(1-d)^2} \times \\ \times \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}\frac{\Gamma(t+d)}{\Gamma(t-d+1)} \tag{3}$$

and

$$\xi(\alpha) = \ln\left(\Gamma\left(1 + 2\cdot\frac{2^{-5.36}\alpha^{0.63}+1}{2^{-5.36}\alpha^{0.63}}\right)\right) - \\ - 2\ln\left(\Gamma\left(1 + \frac{2^{-5.36}\alpha^{0.63}+1}{2^{-5.36}\alpha^{0.63}}\right)\right), \tag{4}$$

α is the packet rate; $d = 0.31$. In (Gorev et al, 2022) an artificial modification of (3) was proposed for $t \in [0, 1]$:

$$\rho(t) = \begin{cases} a|t|^b + 1, |t| \le 1 \\ \left(1 - \frac{2^{-7.21}\alpha^{0.75}}{2^{-7.21}\alpha^{0.75}+1}\right)\frac{2(1-d)t^2-(1-d)^2}{t^2-(1-d)^2} \times \\ \times \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}\frac{\Gamma(t+d)}{\Gamma(t-d+1)}, \quad |t| \ge 1 \end{cases} \tag{5}$$

where the coefficients a, b are taken from the conditions

$$\lim_{t\to 1-0}\rho(t) = \lim_{t\to 1+0}\rho(t), \quad \lim_{t\to 1-0}\frac{d\rho(t)}{dt} = \lim_{t\to 1+0}\frac{d\rho(t)}{dt}. \tag{6}$$

In what follows we use the correlation function (2) with account for (6).

We seek the solution of (1) as the truncated Chebyshev polynomial expansion series, the Chebyshev polynomials of the second kind are taken into account (see, for example, (Gorev et al, 2019)):

$$h(t) = \sum_{s=0}^{n-1} g_s S_s(t), \quad S_s(t) = U_s\left(\frac{2\tau}{T}-1\right), \\ U_s(x) = \sum_{k=0}^{[s/2]} C_{s+1}^{2k+1} x^{s-2k}(x^2-1)^k. \tag{7}$$

The coefficeints g_s in (7) are given by the following expressions (Gorev et al, 2024):

$$h(\tau) = \sum_{s=0}^{n-1} g_s S_s(\tau), \\ \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{00} & G_{01} & \cdots & G_{0,n-1} \\ G_{10} & G_{11} & \cdots & G_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n-1,0} & G_{n-1,1} & \cdots & G_{n-1,n-1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \\ G_{ij} = \int_0^T\int_0^T S_i(\tau)S_j(t)R(t-\tau)dtd\tau, \\ B_i = \int_0^T S_i(t)R(t+z)dt, \tag{8}$$

the corresponding misalignment mean absolute percentage error (MAPE) is as follows:

$$\text{MAPE} = \\ = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{|R(t+z)|}\left|\int_0^T h(\tau)R(t-\tau)d\tau - R(t+z)\right|\right)dt \cdot 100\,\%, \tag{9}$$

the calculation of the integrals in (8) and (9) is organized identically to that organized in (Gorev et al, 2024). The numerical results for the parameters

Table 1

MAPE for the approximations of *n* polynomials for different packet rates

$\alpha = 2^{11}$ p/s		$\alpha = 2^{13}$ p/s		$\alpha = 2^{15}$ p/s		$\alpha = 2^{17}$ p/s	
n	**MAPE, %**	***n***	**MAPE, %**	***n***	**MAPE, %**	***n***	**MAPE, %**
1	27.39	1	26.49	1	26.30	1	25.46
2	18.58	2	17.76	2	17.57	2	16.75
3	11.77	3	11.09	3	10.94	3	10.18
4	8.67	4	8.09	4	7.97	4	7.32
5	6.01	5	5.53	5	5.46	5	4.96
6	4.71	6	4.31	6	4.25	6	3.86
7	3.49	7	3.15	7	3.14	7	2.91
8	2.92	8	2.62	8	2.61	8	2.47
9	2.28	9	2.05	9	2.07	9	2.10
10	2.03	10	1.79	10	1.83	10	1.95
11	1.69	11	1.50	11	1.56	11	1.81
12	1.57	12	1.40	12	1.45	12	1.78
13	1.35	13	1.23	13	1.29	13	1.74

$T = 100$, $z = 3$, which are also used in (Gorev et al, 2024), are calculated. The obtained MAPE results are as follows, see Table 1. As can be seen from the comparison of the results shown in Table 1 with the results obtained in (Gorev et al, 2024), the results for the Chebyshev polynomials of the first king and of the second kind are, in fact, identical.

Conclusions. The paper is devoted to the continuous Kolmogorov–Wiener filter prediction of the heavy-tail MFSD process based on the Chebyshev polynomials of the second kind. Such a problem may be important not only for telecommunications, but also for agriculture, because heavy-tail processes are used in agriculture, see (Baul et al, 2024). The Kolmogorov–Wiener filter is a rather simple algorithm which, after calculation of the weight function, may be used in the signal processing in real-time data exchange, which stresses the urgency of the considered problem. It is shown that the results obtained on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind are identical to the results obtained on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind derived in (Gorev et al, 2024). In fact, such a result occurs not only for the MFSD process but for a couple of heavy-tail models, see (Gorev et al, 2021).

Acknowledgements. *This research is carried out as part of the scientific project "Development of software and hardware of intelligent technologies for sustainable cultivation of agricultural crops in war and post-war times" funded by the Ministry of Education and Science of Ukraine at the expense of the state budget (State Registration No. 0124U000289).*

BIBLIOGRAPHY:

1. Anderson D., Cleveland W. S., Xi B., Multifractal and Gaussian fractional sum–difference models for Internet traffic. *Performance Evaluation*, 2017. Vol. 107, p. 1–33. doi: 10.1016/j.peva.2016.11.001.

2. Gorev V. N., Shedlovska Y. I., Laktionov I. S., Diachenko G. G., Kashtan V. Yu., Khabarlak K. S., Method for signal processing based on Kolmogorov–Wiener prediction of MFSD process. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2024. No. 3, p. 19–25. doi: 10.15588/1607-3274-2024-3-2

3. Gorev V. N., Gusev A. Yu., Korniienko V. I., Kolmogorov–Wiener filter for continuous traffic prediction in the GFSD model. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2022. No. 3, p. 31–37. doi: 10.15588/1607-3274-2022-3-3

4. Gorev V., Gusev A., Korniienko V., Investigation of the Kolmogorov–Wiener filter for treatment of fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind. *CEUR Workshop Proceedings*, 2019. Vol. 2553, p. 596–606. Avaiable at: https://ceur-ws.org/Vol-2353/paper47.pdf

5. Gorev V., Gusev A., Korniienko V., Kolmogorov–Wiener Filter Weight Function for Stationary Traffic Forecasting: Polynomial and Trigonometric Solutions. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2021. Vol. 212, p. 111–129. doi: 10.1007/978-3-030-76343-5_7

6. Baul T., Karlan D., Toyama K., Vasilaky K., Improving smallholder agriculture via video-based group extension. *Journal of Development Economics*, 2024. Vol. 169, 103267. doi: 10.1016/j.jdeveco.2024.103267

REFERENCES:

1. Anderson, D., Cleveland, W. S. & Xi, B. (2017). Multifractal and Gaussian fractional sum–difference models for Internet traffic. *Performance Evaluation*, 107, 1–33. doi: 10.1016/j.peva.2016.11.001

2. Gorev, V. N., Shedlovska, Y. I., Laktionov, I. S., Diachenko, G. G., Kashtan, V. Yu. & Khabarlak, K. S. (2024). Method for signal processing based on Kolmogorov–Wiener prediction of MFSD process. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, No. 3, 19–25. doi: 10.15588/1607-3274-2024-3-2

3. Gorev, V. N., Gusev, A. Yu. & Korniienko, V. I. (2022). Kolmogorov–Wiener filter for continuous traffic prediction in the GFSD model. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, No. 3, 31–37. doi: 10.15588/1607-3274-2022-3-3

4. Gorev, V., Gusev, A., Korniienko, V. (2019). Investigation of the Kolmogorov–Wiener filter for treatment of fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind. *CEUR Workshop Proceedings*, 2553, 596–606. Avaiable at: https://ceur-ws.org/Vol-2353/paper47.pdf

5. Gorev, V., Gusev, A., Korniienko, V. (2021). Kolmogorov–Wiener Filter Weight Function for Stationary Traffic Forecasting: Polynomial and Trigonometric Solutions. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 212, 111–129. doi: 10.1007/978-3-030-76343-5_7

6. Baul, T., Karlan, D., Toyama, K., Vasilaky, K. (2024). Improving smallholder agriculture via video-based group extension. *Journal of Development Economics*, 169, 103267. doi: 10.1016/j.jdeveco.2024.103267