УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.32782/IT/2022-2-9

Оксана ЧЕРНЕНКО
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000, oksanachernenko7@gmail.com
ORCID: *0000-0002-9084-0999*
Scopus Author ID: *36862730800*

Олена ОЛЬХОВСЬКА
кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000, lena@olhovsky.name
ORCID: *0000-0001-5366-5995*
Scopus Author ID: *42262220700*

Дмитро ОЛЬХОВСЬКИЙ
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000, dmitriy@olhovsky.name
ORCID: *0000-0003-0313-6977*
Scopus Author ID: *55328301800*

Юрій ОЛЕКСІЙЧУК
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, olexijchuk@gmail.com
ORCID: *0000-0002-0585-3307*
Scopus Author ID: *54904496400*

Тетяна ПАРФЬОНОВА
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36000, tapa.poltava@gmail.com
ORCID: *0000-0001-9343-2061*
Scopus Author ID: *36089160700*

Оксана ОРІХІВСЬКА
старший викладач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, м. Полтава, Україна, 36014, aka.jeita@gmail.com
ORCID: *0000-0003-2775-0832*

Бібліографічний опис статті*:* Черненко, О., Ольховська, О., Ольховський, Д., Олексійчук, Ю., Парфьонова, Т., Оріхівська, О. (2022). Алгоритм методу гілок та меж для розв'язування оптимізаційних задач з дробово-лінійною цільовою функцією та додатковими комбінаторними обмеженнями. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 2, 79–84, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2022-2-9

АЛГОРИТМ МЕТОДУ ГІЛОК ТА МЕЖ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ ТА ДОДАТКОВИМИ КОМБІНАТОРНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

У роботі розглядається математична модель задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією на множині розміщень. Враховуючи, що задача дробово-лінійного програмування відрізняється від задачі лінійного програмування лише виглядом цільової функції, це дає можливість використовувати для її розв'язування відомі методи лінійного програмування за певної їх модифікації. Серед комбінаторних методів важливе значення як в практичному, так і теоретичному плані має метод гілок та меж.

У роботі поширено метод гілок та меж для розв'язування задач оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною цільовою функцією та додатковими лінійними обмеженнями. Основними критеріями, що визначали ефективність методу при розв'язуванні конкретної задачі були спосіб обчислення оцінок та галуження. Алгоритм складається з двох етапів: спочатку перехід до релаксованої задачі (застосовуючи відповідне відображення переходимо від дробово-лінійної задачі оптимізації до лінійної), далі – модифікований метод гілок та меж, що ґрунтується на ідеях Ленда та Дойга. Комбінаторна умова, а саме, бути елементом множини розміщень, замінена системою обмежень, що описує загальний многогранник розміщень.

В роботі, на основі властивостей застосованого до задачі з дробово-лінійною цільовою функцією відображення, доведено ряд тверджень, що лягли в основу методу розв'язування задачі. Зокрема, теорема про еквівалентність множин допустимих значень вихідної та релаксованої задач та теорема про оцінку допустимих областей задач, які є проміжними в процесі розв'язування.

Запропонований алгоритм методу гілок та меж для розв'язування задач оптимізації на комбінаторній множині розміщень у випадку дробово-лінійної цільової функції видається доцільним надалі застосувати для розв'язування задач оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на інших множинах.

Ключові слова: *метод гілок та меж, розміщення, дробово-лінійна цільова функція, комбінаторна оптимізація.*

Oksana CHERNENKO
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, oksanachernenko7@gmail.com
ORCID: *0000-0002-9084-0999*
Scopus Author ID: *36862730800*

Olena OLKHOVSKA
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, lena@olhovsky.name
ORCID: *0000-0001-5366-5995*
Scopus Author ID: *42262220700*

Dmytro OLKHOVSKY
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, dmitriy@olhovsky.name
ORCID: 0000-0003-0313-6977
Scopus Author ID: *55328301800*

Yuriy OLEKSIYCHUK
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, olexijchuk@gmail.com
ORCID: *0000-0002-0585-3307*
Scopus Author ID*: 54904496400*

Tatyana PARFONOVA
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, tapa.poltava@gmail.com
ORCID: *0000-0001-9343-2061*
Scopus Author ID: *36089160700*

Oksana ORIKHIVSKA
Senior Lecturer at Department of Computer Science and Information Technology, Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, aka.jeita@gmail.com
***ORCID:** 0000-0003-2775-0832*

To cite this article: Chernenko, O., Olkhovska, O., Olkhovsky, D., Oleksiichuk, Yu., Parfyonova, T., Orikhovska, O. (2022). Alhorytm metodu hilok ta mezh dlia rozv'iazuvannia optymizatsiinykh zadach z drobovo-liniinoiu tsilovoiu funktsiieiu ta dodatkovymy kombinatornymy obmezhenniamy [Branch-and-bound algorithm for solving optimization problems with a fractionallinear objective function and additional combinatorial constraints]. *Information Technology Computer Science, Software Engineering and Cyber Security,* 2, 79–84, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2022-2-9

ALGORITHM OF THE BRANCH AND BOUND METHOD FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS WITH A FRACTION-LINEAR OBJECTIVE FUNCTION AND ADDITIONAL COMBINATORY CONSTRAINTS

The paper considers a mathematical model of the problem of combinatorial optimization with a fractional-linear objective function on a set of placements. Given that the problem of fractional-linear programming differs from the problem of linear programming only in the form of the objective function, this makes it possible to use known methods of linear programming with a certain modification to solve it. Among the combinatorial methods, the method of branches and limits is important both in practical and theoretical terms.

In the work the method of branches and bounds is extended for solving optimization problems on placements with a fractional-linear objective function and additional linear constraints. The main criteria that determined the effectiveness of the method in solving a specific problem were the method of calculating estimates and branching. The algorithm consists of two stages: first, the transition to a relaxed problem (using the appropriate mapping, we move from a fractional-linear optimization problem to a linear one), then a modified method of branches and bounds, based on the ideas of Land and Doig. The combinatorial condition, namely, to be an element of the set of placements, is replaced by a system of constraints describing the general polyhedron of placements.

In the work based on the properties of the mapping applied to the problem with a fractional-linear objective function, a number of statements that formed the basis of the method of solving the problem were proved. In particular, the theorem on the equivalence of sets of admissible values of the original and relaxed problems and the theorem on the estimation of admissible areas of problems that are intermediate in the process of solving.

The proposed algorithm of the branch-and-bound method for solving optimization problems on a combinatorial set of placements in the case of a fractional-linear objective function seems appropriate to be applied in the future for solving optimization problems with a fractional-linear objective function on other sets.

***Key words**: method of branches and bounds, placement, fractional-linear objective function, combinatorial optimization.*

Актуальність проблеми. Оптимізаційні задачі на комбінаторних множинах все частіше зустрічаються на практиці та потребують дослідження і розв'язання. Постає необхідність розробки нових та модифікації вже існуючих методів для їх розв'язування. У зв'язку з цим питання евклідової комбінаторної оптимізації все частіше стають метою досліджень вітчизняних та зарубіжних науковців.

Окремим класом можна виділити задачі оптимізації дробово-лінійної цільової функції, які адекватно моделюють ситуації, що мають місце на виробництві, сільському господарстві тощо (Ємець О.О., 2021, с. 63; Ємець О.О., 2022, с. 14). Актуальними залишаються розробка методів та алгоритмів розв'язування таких задач та проблема пошуку більш ефективних алгоритмів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботах (Стоян Ю. Г., 1993; Донець Г. П., 2011) описані методи та алгоритми розв'язування лінійних умовних задач на комбінаторних множинах. Розроблено методи розв'язування дробово-лінійних умовних задач на множинах переставлень (Ємець О. О., 2005; Донець Г. П., 2011), розміщень (Емец О. А., 2011).

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Запропонований в роботі (Емец О. А., 2011) метод розв'язування умовних задач з дробово-лінійною цільовою функцією на розміщеннях ґрунтується на розбитті простору на класи еквівалентності та наступному напрямленому переборі цих класів. Доцільним є також застосування методів дискретної оптимізації (Корбут А. А., 1977) для даного класу задач, враховуючи схожість окремих властивостей допустимих множин дискретної та евклідової комбінаторної оптимізації.

Мета дослідження – модифікуємо метод гілок та меж для розв'язування умовних задач оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною цільовою функцією та обґрунтуємо алгоритм цього методу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Множину k перших натуральних чисел позначимо J_k, тобто $J_k=\{1,2,...,k\}$, а $J_k^0=J_k\cup\{0\}$. Нехай задано мультимножину $G=\{g_1,g_2,...,g_\eta\}$ з основою $S(G)=(e_1,e_2,...,e_n)$, де $e_i\in R^1\ \ \forall i\in J_n$, та кратностями елементів $k_G(e_i)=\eta_i$, $i\in J_n$. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{n}\eta_i=\eta$ (Стоян Ю. Г., 1993).

Візьмемо довільне $k\in J_\eta$. Множина усіх упорядкованих k-вибірок з мультимножини G вигляду $\left(g_{i_1},g_{i_2},...,g_{i_k}\right)$, де $g_{i_j}\in G,\ i_j\ne i_t\ \forall\ i_j,i_t\in J_\eta$, $\forall\ j,\ t\in J_k$, утворює загальну множину розміщень $E_{\eta n}^k(G)$. Нехай елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням, а елементи $(e_1,e_2,...,e_n)$ її основи – за зростанням.

Опуклою оболонкою множини $E_{\eta n}^k(G)$ є загальний многогранник розміщень $\Pi_{\eta n}^k(G)$, що описується системою нерівностей

$$\sum_{j=1}^{|\omega|}g_j\le\sum_{i\in\omega}x_i\le\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{\eta-j+1}\qquad\forall\omega\subset J_k,\qquad(1)$$

де $g_j\in G$, $|\omega|$ – кількість елементів у множині ω (Стоян Ю. Г., 1993).

Нехай $k,\ n,\ \eta,\ m,\ p$ – натуральні константи, $c_j,\ d_j\in R\ \ \forall j\in J_m^0,\ \ a_{ij},b_i\in R\ \ \ \forall j\in J_m,\forall i\in J_p$, також $t=(t_1,t_2,...,t_k,\ t_{k+1},...,t_m)\in R^m$, де $x_j=t_j\ \forall j\in J_k$, тобто змінні $t_{k+1},\ ...,\ t_m$ є неперервними, а $x_1,\ ...,\ x_k$ − комбінаторними.

Розглянемо задачу вигляду: знайти впорядковану пару $\left\langle F(t^*),\ t^*\right\rangle$, таку що

$$F(t^*)=\max_{t\in R^m}\frac{\sum_{j=1}^{m}c_jt_j+c_0}{\sum_{j=1}^{m}d_jt_j+d_0},$$

$$t^*=\arg\max_{t\in R^m}\frac{\sum_{j=1}^{m}c_jt_j+c_0}{\sum_{j=1}^{m}d_jt_j+d_0},\qquad(2)$$

за комбінаторної умови

$$x=(x_1,...,x_k)\in E_{\eta n}^k(G)\subset R^m,\qquad k\le m,\qquad(3)$$

та додаткових лінійних обмежень

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_j\le b_i,\quad i\in J_p.\qquad(4)$$

Задача (2)–(4) може бути розв’язана шляхом переходу до релаксованої задачі: умову (3) „послабимо”, замінивши її (1). Застосовуючи до задачі (1), (2), (4) відображення ψ, яке задамо співвідношеннями

$$y_0=\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}d_jt_j+d_0},\quad z_j=t_jy_0\quad\forall j\in J_m,\ \ t\in R^m,\qquad(5)$$

перейдемо до задачі з лінійною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями:

$$F(z)=\max_{z\in R^{m+1}}\ \sum_{j=1}^{m}c_jz_j+c_0y_0,$$

$$z=\arg\max_{z\in R^{m+1}}\ \sum_{j=1}^{m}c_jz_j+c_0y_0\qquad(6)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}z_j-b_iy_0\le0,\ \ i\in J_p,\qquad(7)$$

$$\sum_{j=1}^{|\omega|}g_jy_0\le\sum_{i\in\omega}y_i\le\sum_{j=1}^{|\omega|}g_{\eta-j+1}y_0\qquad\forall\omega\subset J_k,\qquad(8)$$

$$\sum_{j=1}^{m}d_jz_j+d_0y_0=1,\quad y_0>0,\quad z_j\ge0\quad\forall j\in J_m,\qquad(9)$$

де $z=(y_0,z_1,...,z_k,\ z_{k+1},...,z_m)\in R^{m+1}$, $y_j=z_j\ \ \forall j\in J_k$.

Комбінаторна умова (3) після застосування відображення (5) запишеться у вигляді:

$$y=(y_0,y_1,...,y_k)\in E\subset R^{m+1}.\qquad(10)$$

Множину, задану системою (8), позначимо $Q_{\eta n}^k(G)$. Задачі (1), (2), (4) та (6)–(9) еквівалентні, тобто, якщо $z^*=(y_0^*,z_1^*,...,z_m^*)$, де $y_j=z_j\ \ \forall j\in J_k$, – оптимальний розв’язок задачі (6)–(9), то $t^*=\left(t_1^*,t_2^*,...,t_m^*\right)$, де $t_j^*=z_j^*\left(y_0^*\right)^{-1}$, $t_j=x_j\ \ \forall j\in J_k$, – оптимальний розв’язок (1), (2), (4). Аналогічне твердження має місце і для задач (2)–(4) та (6), (7), (9), (10).

Опишемо алгоритм методу гілок та меж для розв’язування задачі (2)–(4):

1. Перейти до релаксованої задачі: умову (3) «послабити», замінивши її (1) та застосувати перетворення (5) до задачі (1), (3), (4).
2. Розв’язати лінійну задачу (6)–(9).
3. Якщо (6)–(9) не має розв’язку, то не має розв’язку (2)–(4), інакше нехай $\bar t=\bar z\left(y_0\right)^{-1}$ – екстремаль (1), (2), (4).
4. Якщо $\bar x\in E_{\eta n}^k(G)$, де $\overline{x_j}=\overline{t_j}\ \forall j\in J_k$, то $\left\langle F(x),\ x\right\rangle$ – розв’язок задачі (2)–(4), інакше перейти на корок 5.
5. Визначити індекс ρ компоненти t_ρ точки $\bar t$, т. що $t_\rho\notin G$, або $k_{\bar t}\left(t_\rho\right)>k_G\left(t_\rho\right)$.

6. Записати два обмеження, що відтинають $\bar{t}$:

$$t_\rho \le e_i^1, \tag{11}$$

$$t_\rho \ge e_i^2, \tag{12}$$

де

$$e_i^1 = \max\left\{ e_i \left| e_i \in S(G),\ e_i < t_\rho,\ (t_1, t_2, ..., t_{\rho-1}, e_i) \in E_{\eta n}^{\rho}(G) \right. \right\},$$

$$e_i^2 = \min\left\{ e_i \left| e_i \in S(G),\ e_i > t_\rho,\ (t_1, t_2, ..., t_{\rho-1}, e_i) \in E_{\eta n}^{\rho}(G) \right. \right\}.$$

7. Застосувати до (11), (12) перетворення (5):

$$z_\rho \le e_i^1 y_0, \tag{13}$$

$$z_\rho \ge e_i^2 y_0, \tag{14}$$

8. Приєднати до останньої задачі вигляду (6)–(9) обмеження (13) та застосувати кроки 2–4 до розв'язування (6)–(9), (13). Якщо задача (6)–(9), (13) не має розв'язку, перейти на крок 9, інакше $\left\langle F(\overline{z_1}), \overline{z_1} \right\rangle$ – розв'язок задачі (6)–(9), (13).

9. Приєднати до останньої задачі вигляду (6)–(9) обмеження (14) та застосувати кроки 2–4 до розв'язування (6)–(9), (14). Якщо задача (6)–(9), (14) не має розв'язку, перейти на крок 10, інакше $\left\langle F(\overline{z_2}), \overline{z_2} \right\rangle$ – розв'язок задачі (6)–(9), (14).

10. Якщо жодна із задач вигляду (6)–(9), (13) та (6)–(9), (14) розв'язку не має, то задача (2)–(4) теж розв'язку не має.

11.Якщо одна із задач вигляду (6)–(9), (13) чи (6)–(9), (14) розв'язку не має, то перейти на крок 4.

12. Якщо обидві задачі вигляду (6)–(9), (13) та (6)–(9), (14) мають розв'язок, то для подальшого галуження вибрати ту, яка надає цільовій функції більшого значення, і перейти на крок 4.

Вищеописаний алгоритм ґрунтується на таких ідеях. Позначимо D – допустиму область вихідної задачі, тобто множину точок, що задовольняють умовам (2)–(4). Згідно з методом гілок та меж множину D розіб'ємо на частини, що не мають спільних точок, тобто $D = D_1 \cup D^* \cup D_2$, $D_1 \cap D^* \cap D_2 = \varnothing$, де D_1 – множина допустимих розв'язків задачі (2)–(4) при додаванні обмеження (11); D^* – множина допустимих розв'язків задачі (2)–(4) при додаванні обмеження $e_i^2 \le t_\rho \le e_i^1$; D_2 – множина допустимих розв'язків задачі (2)–(4) при додаванні обмеження (12). Очевидно, що множина розв'язків D^* є порожньою для задачі (2)–(4) і з подальшого галуження може бути виключена.

Застосуємо до системи нерівностей, що описують множини D_1, D^*, D_2, перетворення (5), отримаємо Q_1, Q^*, Q_2.

Теорема 1. Обмеження (13), (14) не відсікають жодної точки $z = (y_0, z_1, ..., z_m)$, т. що $y \in E$, де $y_j = z_j$ $\forall j \in J_k$.

Доведення. Нехай існує $z \in Q^*$, т. що z – розв'язок задачі (6), (7), (9), (10). Застосовуючи до z перетворення, обернене до (5), отримаємо точку t, $t = z(y_0)^{-1}$. Враховуючи, що задачі (6), (7), (9), (10) та (2)–(4) еквівалентні, t – розв'язок задачі (2)–(4). З (Емец О. А., 2011) очевидно, що відображення ψ задає взаємнооднозначну відповідність між D – множиною точок, що задовольняють (2)–(4) та Q – множиною точок, що задовольняють (6), (7), (9), (10), а отже, $t \in D^*$. Однак за побудовою множина D^* є порожньою для задачі (2)–(4). Суперечність. Таким чином, множина Q^* не містить розв'язків задачі (6), (7), (9), (10). Теорему доведено.

Враховуючи той факт, що задачі (1), (2), (4) та (6)–(9) еквівалентні, має місце наступна теорема.

Теорема 2. Оцінками допустимих областей D_i задач (2)–(4), (11) чи (2)–(4), (12) є значення цільових функцій відповідних задач (1), (2), (4), (11) чи (1), (2), (4), (12).

Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким чином, у роботі запропоновано алгоритм методу гілок та меж для розв'язування задач оптимізації на комбінаторній множині розміщень у випадку дробово-лінійної цільової функції. В перспективі планується створити програмне забезпечення, що реалізує даний алгоритм, та дати йому теоретичну оцінку.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К.: Наукова думка, 1981. 288 с.

2. Стоян Ю. Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: ІСДО, 1993. 188 с.

3. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. К.: Наукова думка, 2005. 117 с.

4. Емец О. А., Черненко О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография. Київ: Наукова думка, 2011. 154 с.

5. Донець Г. П., Колєчкіна Л. М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях: монографія. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.

6. Ємець О.О., Черненко О.О., Чілікіна Т. В., Ольховська О. В. Огляд задач комбінаторної оптимізації визначення рентабельності сільськогосподарського виробництва та методи їх розв'язування. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. *Серія: фізико-математичні науки*. Випуск 22. 2021. С. 63–74.

7. Ольховський Д., Ольховська О., Черненко О., Парфьонова Т., Чілікіна Т. Програмний комплекс для розв'язування евклідових комбінаторних оптимізаційних задач точними та наближеними методами. *Інформаційні технології та суспільство,* 2 (4). 2022. С. 78–87.

8. Юрій Олексійчук, Дмитро Ольховський, Олена Ольховська, Тетяна Чілікіна, Оксана Черненко, Оксана Оріхівська. Комбінаторна задача про побудову мостів та методи її розв'язання. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. Кременчук: КРНУ, 2022. Випуск 1(132). С.115–122.

9. Ємець, О., Черненко, О., Парфьонова, Т., Ольховська, О. Математична модель задачі оптимального розміщення продуктивних сил з врахуванням мінімальної шкоди навколишньому середовищу. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security, випуск* 1, 2022, С. 14–19.

10. Корбут А. А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю. Ю. Метод ветвей и границ: обзор теории, алгоритмов, программ и приложений. *Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimiz*. 1977. № 2. P. 253–280.

REFERENCES:

1. Sergienko I.V., Kaspshitskaya M.F. (1981). Modely y metodы reshenyia na ЭVM kombynatornыkh zadach optymyzatsyy [Models and methods for solving combinatorial optimization problems on a computer]. K.: Naukova Dumka. 288 p. [in Russian].

2. Stoyan Yu. G., Yemets O.O. (1993). Teoriya i metodȳ evklidovoyi kombinatornoyi optȳmizatsiyi [Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization]. К.: Institute for Systems Research in Education. 188 p. [in Ukrainian].

3. Yemets O. O., Kolechkina L. M. (2005). Zadachi kombinatornoi optymizatsii z drobovo-liniinymy tsilovymy funktsiiamy [Problems of combinatorial optimization with shot-linear objective functions]. K .: Naukova Dumka. 117 p. [in Ukrainian].

4. Yemets O. A., Chernenko O. A. (2011). Optymyzatsyia drobno-lyneinыkh funktsyi na razmeshchenyiakh: monohrafyia [Optimization of fractional-linear functions on placements: monograph]. Kiev: Naukova Dumka. 154 p. [in Russian].

5. Donets G. P., Kolechkina L. M. (2011). Ekstremalni zadachi na kombinatornykh konfihuratsiiakh: monohrafiia [Extremal problems on combinatorial configurations: monograph]. Poltava: RVV PUET. 309 p. [in Ukrainian].

6. Yemets, O.O., Chernenko, O.O., Chilikina, T.V., Olkhovska, O.V. (2021). Ohliad zadach kombinatornoi optymizatsii vyznachennia rentabelnosti silskohospodarskoho vyrobnytstva ta metody yikh rozviazuvannia [Review of combinatorial optimization problems for determining the profitability of agricultural production and methods for solving them]. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky. – Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 22, 63–74 [in Ukrainian].

7. Olkhovskyi D., Olkhovska O., Chernenko O., Parfyonova T., Chilikina T. (2022). Prohramnyi kompleks dlia rozviazuvannia evklidovykh kombinatornykh optymizatsiinykh zadach tochnymy ta nablyzhenymy metodamy [Software complex for solving Euclidean combinatorial optimization problems by exact and approximate methods]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo. – Information technologies and society*, 2 (4), P. 78–87 [in Ukrainian].

8. Yurii Oleksiichuk, Dmytro Olkhovskyi, Olena Olkhovska, Tetiana Chilikina, Oksana Chernenko, Oksana Orihivska (2022). Kombinatorna zadacha pro pobudovu mostiv ta metody yii rozviazannia [The combinatorial problem of building bridges and methods of its solution]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhaila Ostrohradskoho. – Bulletin of Mykhailo Ostrogradsky National University of Kremenchug. –* Kremenchuk: KRNU. Issue 1(132). P. 115–122 [in Ukrainian].

9. Yemets, O., Chernenko, O., Parfyonova, T., Olkhovska, O. (2022). Matematychna model zadachi optymalnoho rozmishchennia produktyvnykh syl z vrakhuvanniam minimalnoi shkody navkolyshnomu seredovyshchu [Mathematical model of the problem of the optimal distribution of productive forces with the improvement of the minimum amount of stress in the middle]. Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security, issue 1, P. 14–19 [in Ukrainian].

10. A. A. Korbut, I. Kh. Syhal, Y. Kh., Fynkelshtein Yu. Yu. (1977). Metod vetvei y hranyts: obzor teoryy, alhorytmov, prohramm y prylozhenyi [Branch and Bound Method: A Review of Theory, Algorithms, Programs, and Applications]. Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimization. No. 2. P. 253–280 [in Russian].